UNIVERSITATEA „AL.I.CUZA" IAȘI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ

A.RADU

Probleme de mecanică

VOL. II.

Dinamica și statica

Fascicola II-a

UZ INTERN
•1975•

Scanned with OKEN Scanner

U N I V E R S I T A T E A "AL. I. C U Z A" I A Ş I

FACULTATEA DE MATEMATICA

A.RADU

P R O B L E M E D E M E C A N I C A

Vol.II

D I N A M I C A Ş I S T A T I C A

Fascicola a II-a

- I A Ş I -

1 9 7 5

PARTEA A TREIA

DINAMICA SI STATICA SISTEMELOR MATERIALE

Capitolul XI

GEOMETRIA MASELOR

Fie un sistem de n puncte materiale P_i, de mase m_i și de vectori de poziție $\vec{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$, $1 \leq i \leq n$.

Masa totală a sistemului material este

$$M = \sum_1^n m_i . \tag{11.1}$$

Vectorul de poziție al centrului maselor m_i plasate în punctele P_i are expresia

$$\vec{r}^* = \frac{1}{M} \sum_1^n m_i \vec{r}_i . \tag{11.2}$$

Un corp continuu sau un mediu continuu ocupă un domeniu $\mathcal{D}$ din spațiul euclidian cu trei dimensiuni. In domeniul mărginit $\mathcal{D}$ se definește o distribuție de masă sau o măsură pozitivă, ca o funcție finită nenegativă și numărabil aditivă de mulțime. Această măsură se notează cu $m(e)$ și reprezintă masa pe care o are porțiunea e oarecare a corpului $\mathcal{D}$. In fiecare punct P al corpului continuu, în general, se poate defini o masă specifică sau o densitate de masă ρ, presupusă funcție continuu diferențiabilă. Dacă ρ este constant în tot domeniul $\mathcal{D}$, corpul se numește omogen. Masa specifică este masa raportată la unitate de volum, de arie sau de lungime, după cum este vorba de un volum, de o suprafață sau de o curbă materială. Unui element oarecare al corpului luat în jurul lui P, element de volum $d\tau$ în primul caz, element de

arie $d\sigma$ în al doilea şi element de arc ds în al treilea, îi corespunde un element de masă

(11.3) $$dm = \rho d\tau \quad \text{sau} \quad \rho d\sigma \quad \text{sau} \quad \rho ds .$$

Masa porţiunii de corp, care ocupă un domeniu e, este

(11.4) $$m(e) = \int_e \rho(P) d\tau \quad \text{sau} \quad \int_e \rho(P) d\sigma \quad \text{sau} \quad \int_e \rho(P) ds ,$$

iar masa totală a corpului are expresia

(11.5) $$M = m(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} dm .$$

Semnul $\int$, care va înlocui în continuare semnul $\sum$ utilizat în cazul sistemelor de puncte materiale, înseamnă, fiind elementul diferenţial este notat dm, o integrală Stieltjes-Lebesgue, extinsă la toată masa sistemului material. In cazul unei distribuţii discrete de masă ea se reduce la o sumă, iar dacă masa este distribuită în mod continuu, îi corespunde o integrală de volum, de suprafaţă sau curbilinie, după cum avem un volum, o suprafaţă sau o curbă materială.

Vectorul de poziţie al centrului de masă P^* pentru un corp continuu este

(11.6) $$\bar{r}^* = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{D}} \bar{r} dm .$$

Pe componente, faţă de un reper cartezian $Ox_1x_2x_3$, relaţia (11.6) are forma

(11.7) $$x_i^* = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{D}} x_i dm , \quad (i = 1,2,3).$$

Fiind dat un corp material sau un sistem oarecare de mase, se numeşte moment de inerţie al său în raport cu un punct (moment de inerţie polar), sau cu o dreaptă (moment de inerţie axial), sau cu un plan (moment de inerţie planar), integrala

(11.8) $$\int_{\mathcal{D}} \delta^2 dm ,$$

δ fiind distanţa la punct, sau la dreaptă, sau la plan a elementului de masă dm.

Se numeşte moment de inerţie centrifug (produs de inerţie, moment de inerţie mixt, moment de deviaţie) al unui sistem material faţă de două plane rectangulare, expresia

(11.9) $$\int_{\mathcal{D}} \delta'\delta'' dm ,$$

unde δ' şi δ'' sînt distanţele la cele două plane ale elementului de masă dm.

Acestea sînt momente de inerţie mecanice. Momentele de inerţie corespunzătoare lui $\rho = 1$ se numesc momente de inerţie geometrice.

Considerăm o axă (Δ^*) care trece prin centrul de masă al unui sistem material şi o axă (Δ) paralelă cu (Δ^*). Notînd cu d distanţa dintre cele două axe şi cu I_{Δ^*} şi I_Δ momentele de inerţie ale sistemului material în raport cu axele respective, avem:

<u>Teorema lui Steiner</u>. Momentul de inerţie al unui sistem material faţă de o axă este egal cu momentul de inerţie al său faţă de axa paralelă care trece prin centrul de masă al sistemului, adunat cu produsul masei totale a sistemului prin pătratul distanţei dintre cele două axe, adică

(11.10) $$I_\Delta = I_{\Delta^*} + Md^2 .$$

Teoreme analoge au loc pentru momentele de inerţie polare sau planare ale unui sistem material.

Pentru momentul de inerţie axial I_Δ se utilizează şi forma

(11.11) $$I_\Delta = Mk_\Delta^2 ,$$

unde numărul $k_\Delta > 0$ se numeşte rază de inerţie sau rază de giraţie.

Presupunem că axa (Δ) trece prin punctul O şi notăm cu $\bar{u}$ versorul său, ale cărui componente faţă de reperul $Ox_1x_2x_3$ sînt u_i, $i = 1,2,3$. Avem

(11.12) $$I_\Delta = I_{ij}u_iu_j , \quad u_iu_i = 1 ,$$

unde

(11.13) $$I_{ij} = (\delta_{ij}\delta_{hk} - \delta_{ih}\delta_{jk})\int_{\mathcal{B}} x_h x_k dm ,$$

δ_{ij} fiind tensorul unitar sau simbolul lui Kronecker

(11.14) $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 , & \text{pentru } j = i , \\ 0 , & \text{pentru } j \neq i . \end{cases}$$

Cantităţile I_{ij} definite prin (11.13) sînt componentele unui tensor simetric ortogonal afin de ordinul doi, numit tensorul de inerţie al sistemului material; I_{11}, I_{22}, I_{33} sînt momentele de inerţie faţă de axele de coordonate, iar $-I_{23}, -I_{31}, -I_{12}$ sînt momentele centrifuge ale sistemului material faţă de planele de coordonate.

Luăm pe axa (Δ) punctul $N(x_1, x_2, x_3)$ determinat de

(11.15) $$\overrightarrow{ON} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{I_\Delta}} \quad \text{sau} \quad x_i = \frac{u_i}{\sqrt{I_\Delta}} , \ (i=1,2,3), \ I_\Delta > 0 .$$

Locul geometric al punctului N cînd direcţia axei (Δ) variază este cuadrica

(11.16) $$I_{ij}x_i x_j = 1 ,$$

care se numeşte elipsoidul de inerţie al sistemului material relativ la punctul O.

Axele de simetrie ale elipsoidului de inerţie se numesc axe principale de inerţie şi ele determină două cîte două planele principale de inerţie relative la punctul O. Axele principale de inerţie corespund valorilor extreme ale momentelor de inerţie axiale. Momentele de inerţie faţă de axele principale de inerţie se numesc momente principale de inerţie. Ele sînt egale cu rădăcinile ecuaţiei în λ

(11.17) $$\det \| I_{ij} - \lambda \delta_{ij} \| = 0 .$$

Elipsoidul de inerţie relativ la centrul de masă al sistemului material se numeşte elipsoid central de inerţie, iar

axele sale de simetrie se numesc axe principale centrale de inerţie (axe libere).

Dacă sistemul material ocupă un domeniu într-un plan, atunci în locul elipsoidului de inerţie vom avea o elipsă de inerţie în acel plan.

239. Se consideră un arc de cerc şi sectorul circular corespunzător formate din materiale omogene. Să se arate că centrele lor de masă sînt situate pe axa comună de simetrie şi au distanţele pînă la centrul cercului în raportul $\frac{3}{2}$.

Rezolvare. Notăm cu R raza sectorului circular şi cu 2α deschiderea sa (unghiul la centru). Luăm sistemul de coordonate carteziene ortogonale x_1Ox_2, în planul sectorului circular, cu originea în centrul cercului şi cu axa Ox_1 coincizînd cu axa de simetrie a sectorului circular. Fie (x_1^*, x_2^*) coordonatele centrului de masă al sectorului circular şi $(x_1^{*'}, x_2^{*'})$ cele ale centrului de masă al arcului corespunzător. In cazul de faţă utilizarea coordonatelor polare r şi θ este avantajoasă.

Pentru arcul de cerc, avem

$$dm = \rho\, ds = \rho R d\theta \quad , \quad \rho = \text{const.},$$

prin urmare, masa arcului de cerc este

$$M' = \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} R d\theta = 2R\alpha\rho \quad , \tag{1}$$

iar

$$x_1^{*'} = \frac{1}{M'} \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho\, x_1 R d\theta = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta = \frac{R \sin\alpha}{\alpha} \quad , \quad x_2^{*'} = 0 \, . \tag{2}$$

Pentru sectorul circular

$$dm = \rho\, d\sigma = \rho r dr d\theta \quad , \quad \rho = \text{const.},$$

deci, masa sa are expresia

$$M = \rho \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} r dr d\theta = R^2 \alpha \rho \tag{3}$$

şi

(4) $x_1^* = \frac{1}{M}\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha}\rho\, x_1 r\,dr\,d\theta = \frac{1}{R^2\alpha}\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$,

$x_2^* = 0$.

Din (2) şi (4) rezultă afirmaţia din enunţul problemei.

Observaţii. 1° Putem deduce imediat coordonatele centrului de masă al unui sector de coroană circulară cu razele R_1 şi R_2 ($R_1 > R_2$) şi deschiderea 2α. Rezultă că masa respectivă are expresia

$$M = \rho(R_1^2 - R_2^2)\alpha ,$$

iar coordonatele centrului de masă sînt

$$x_1^* = \frac{2(R_1^3 - R_2^3)\sin\alpha}{3(R_1^2 - R_2^2)\alpha} , \quad x_2^* = 0 .$$

2° De asemenea, se pot găsi coordonatele centrului de masă al segmentului circular corespunzător sectorului de cerc dat. Pentru aceasta, avem în vedere faptul că segmentul de cerc se obţine din sectorul circular prin îndepărtarea unui triunghi de masă $\rho R^2\sin\alpha\cos\alpha$ şi cu centrul de masă de coordonate $(\frac{2}{3}R\cos\alpha, 0)$. Se găseşte

$$M = R^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha), \quad x_1^* = \frac{4R\sin^3\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} , \quad x_2^* = 0 .$$

240. Să se arate că centrul de masă al unui segment de parabolă (domeniul plan limitat de parabolă şi de o coardă oarecare) este situat pe diametrul conjugat direcţiei coardei şi împarte segmentul diametrului dintre parabolă şi coardă în raportul 3/2 (Arhimede).

Rezolvare. Considerăm parabola

(1) $$x_2^2 = 2px_1 , \quad (p > 0)$$

şi secanta

(2) $$x_2 = \mu x_1 + \nu \quad , \quad (\mu \neq 0 \ , \ \mu\nu \leq 0) \ .$$

Diametrul conjugat direcţiei de pantă μ , adică locul mijloacelor coardelor parabolei paralele cu această direcţie, are ecuaţia

(3) $$x_2 = \frac{p}{\mu} \ .$$

Dreapta (3) intersectează parabola (1) în punctul $P_1(\frac{p}{2\mu^2}, \frac{p}{\mu})$ şi coarda (2) în punctul $P_2(\frac{p - \mu\nu}{\mu^2}, \frac{p}{\mu})$. Lungimea segmentului P_1P_2 este

(4) $$a = \overline{P_1P_2} = \frac{p - 2\mu\nu}{2\mu^2} \ .$$

Fie (a_1, b_1) şi $a_2, b_2)$ coordonatele punctelor de intersecţie a parabolei (1) cu secanta (2). Ordonatele b_1, b_2 sînt rădăcinile ecuaţiei

$$\mu x_2^2 - 2px_2 + 2p\nu = 0 \ ,$$

prin urmare

$$b_1 = \frac{1}{\mu}(p - \sqrt{p^2 - 2p\mu\nu}) \ , \ b_2 = \frac{1}{\mu}(p + \sqrt{p^2 - 2p\mu\nu}) \ .$$

Masa segmentului de parabolă, presupus omogen, este

(5) $$M = \rho \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \int_{\frac{x_2^2}{2p}}^{\frac{x_2 - \nu}{\mu}} dx_1 = \frac{2\rho\sqrt{p}}{3\mu^3}(p - 2\mu\nu)^{3/2} \ .$$

Dacă notăm cu $P^*(x_1^*, x_2^*)$ centrul de masă al segmentului de parabolă, avem

(6) $$Mx_2^* = \rho \int_{b_1}^{b_2} x_2 dx_2 \int_{\frac{x_2^2}{2p}}^{\frac{x_2 - \nu}{\mu}} dx_1 = \frac{2\rho p\sqrt{p}}{3\mu^4}(p - 2\mu\nu)^{3/2} = M\frac{p}{\mu} \ ,$$

deci, P^* se află pe diametrul conjugat direcţiei de pantă μ .

De asemenea, găsim

$$Mx_1^* = \rho \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \int_{\frac{x_2^2}{2p}}^{\frac{x_2 - \nu}{\mu}} x_1 dx_1 = \frac{2\rho\sqrt{p}\,(4p - 3\mu\nu)}{15\mu^5}(p - 2\mu\nu)^{3/2} \ ,$$

de unde

(7) $$x_1^* = \frac{4p - 3\mu\nu}{5\mu^2} .$$

Astfel, ţinînd seama de (4), obţinem

$$\overline{P^*P_2} = \frac{p - 2\mu\nu}{5\mu^2} = \frac{2}{5}a , \quad \overline{P_1P^*} = \frac{3(p - 2\mu\nu)}{10\mu^2} = \frac{3}{5}a ,$$

aşadar $$\overline{P_1P^*} = \frac{3}{2}\overline{P^*P_2} .$$

Observaţii . 1° Cazul, mai simplu, cînd secanta este perpendiculară pe axa parabolei, deci, cînd în locul ecuaţiei (2) avem $x_1 = a > 0$, se poate trata direct, însă poate fi obţinut ca un caz limită al celui tratat mai sus, pentru $|\mu|$ şi $|\nu|$ tinzînd la infinit, astfel încît $\lim\frac{\nu}{\mu} = -a$.

2° Calculele precedente se simplifică dacă raportăm parabola (1) la diametrul (3) şi la tangenta în punctul P_1, care este paralelă cu secanta (2). In adevăr, dacă notăm cu P_1y_1 axa coliniară cu vectorul $\overrightarrow{P_1P_2}$ şi cu P_1y_2 tangenta la parabolă în punctul P_1, avem

$$x_1 = \frac{p}{2\mu^2} + y_1 + y_2\cos\alpha , \quad x_2 = \frac{p}{\mu} + y_2\sin\alpha ,$$

unde α este unghiul dreptei (2) cu axa Ox_1 ($\operatorname{tg}\alpha = \mu$) .

Rezultă că faţă de axele P_1y_1, P_1y_2 parabola (1) are ecuaţia

(1') $$y_2^2 = \frac{2p}{\sin^2\alpha}\, y_1 ,$$

iar secanta (2) este reprezentată prin

(2') $$y_1 = \frac{p - 2\mu\nu}{2\mu^2} = a .$$

In fond am redus problema la cazul menţionat la observaţia 1°.

241. Să se afle centrul de masă al unui arc de spirală logaritmică cu polul în O, în ipoteza că raportul dintre densitatea de masă şi curbură este constant.

Rezolvare. Ecuația spiralei logaritmice cu polul în O este de forma (1) de la problema 189, iar expresia curburii sale într-un punct este dată de formula (10) de la aceeași problemă. Astfel, densitatea de masă într-un punct al arcului este

$$\rho = \frac{k \sin\varphi}{r} , \quad k = \text{const.}$$

Pe de altă parte, rezultă

$$ds = \frac{r}{\sin\varphi} d\theta .$$

prin urmare, avem

$$dm = k d\theta .$$

Presupunem că arcul respectiv corespunde lui $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Deducem că masa arcului este

$$M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} k d\theta = k(\theta_2 - \theta_1) .$$

Coordonatele centrului de masă sînt date de

$$Mx_1^* = k\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\cos\theta \, d\theta , \quad Mx_2^* = k\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sin\theta \, d\theta .$$

Dacă notăm cu z^* afixa centrului de masă, $z^* = x_1^* + ix_2^*$, avem

$$Mz^* = k\int_{\theta_1}^{\theta_2} re^{i\theta} d\theta = kr_0\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{(\lambda+i)\theta} d\theta .$$

Se găsește

$$z^* = \frac{r_0(\lambda - i)}{(\theta_2 - \theta_1)(\lambda^2+1)}\left[e^{(\lambda+i)\theta_2} - e^{(\lambda+i)\theta_1}\right].$$

Observînd că

$$\frac{\lambda - i}{\lambda^2+1} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi - i}{\operatorname{ctg}^2\varphi + 1} = e^{-i\varphi}\sin\varphi ,$$

putem scrie

$$z^* = \frac{r_0 \sin\varphi}{\theta_2 - \theta_1}\left[e^{\lambda\theta_2 + i(\theta_2 - \varphi)} - e^{\lambda\theta_1 + i(\theta_1 - \varphi)}\right] .$$

242. Să se afle centrul de masă al unui arc al elicei circulare

$$x_1 = a\cos\theta\ ,\ x_2 = a\sin\theta\ ,\ x_3 = b\theta\ ,$$

în fiecare din cazurile :

1° $\rho = \text{const.}$, $\theta \in [0, \theta_0]$, 2° $\rho = e^{-ks}$, $k = \text{const.} > 0$, $\theta \in [0, +\infty)$.

Rezolvare. Avem (v. problemele 112, 193, 223)

$$ds = \frac{a}{\cos\alpha}\,d\theta\ ,\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}\ ,\quad dm = \rho\,ds\ .$$

1° Rezultă

$$M = \frac{a\rho}{\cos\alpha}\,\theta_0 = \rho\,\theta_0\sqrt{a^2 + b^2}\ ,$$

$$x_1^* = \frac{a\sin\theta_0}{\theta_0}\ ,\quad x_2^* = \frac{a(1-\cos\theta_0)}{\theta_0}\ ,\quad x_3^* = \frac{b\,\theta_0}{2}\ .$$

Observăm că centrul de masă este situat pe axa Ox_3 dacă și numai dacă $\theta_0 = 2n\pi$ $(n \in Z)$, deci, pentru un număr întreg de spire ale elicei.

2° Dacă presupunem că s și θ au aceeași origine, deducem

$$s = \frac{a}{\cos\alpha}\theta\ ,\quad \rho = e^{-c\theta}\ ,\quad c = \frac{ak}{\cos\alpha} = k\sqrt{a^2+b^2} > 0\ .$$

Prin urmare

$$M = \frac{c}{k}\int_0^{\infty} e^{-c\theta}d\theta = \frac{1}{k}\ .$$

Coordonatele centrului de masă au expresiile

$$x_1^* = ac\int_0^{\infty} e^{-c\theta}\cos\theta\,d\theta\ ,\ x_2^* = ac\int_0^{\infty} e^{-c\theta}\sin\theta\,d\theta\ ,\ x_3^* = bc\int_0^{\infty} e^{-c\theta}\,\theta\,d\theta\ ,$$

de unde

$$z^* = x_1^* + ix_2^* = ac\int_0^{\infty} e^{(i-c)\theta}d\theta = \frac{ac(c+i)}{1+c^2}\ ,\ x_3^* = \frac{b}{c}\ .$$

243. Să se afle centrul de masă al porțiunii din elicoidul omogen

(1) $x_1 = u\cos\theta\ ,\ x_2 = u\sin\theta\ ,\ x_3 = k\theta\ ,\ u \in [0, a],\ \theta \in [0, \pi]\ ,$

unde k = const. (v. problema 209).

Rezolvare. Pentru suprafaţa (1) avem

$$dv = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right| du d\theta = \sqrt{u^2 + k^2}\, du\, d\theta ,$$

astfel încît, obţinem

$$M = \rho \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{u^2+k^2}\, du = \frac{\rho\pi}{2}\left[a\sqrt{a^2+k^2} + k^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+k^2}}{k} \right] ,$$

unde ρ reprezintă masa specifică şi este o constantă.

De asemenea, deducem

$$Mx_1^* = \rho \int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \int_0^a u\sqrt{u^2+k^2}\, du = 0 ,$$

$$Mx_2^* = \rho \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^a u\sqrt{u^2+k^2}\, du =$$

$$= 2\rho \int_0^a u\sqrt{u^2+k^2}\, du = \frac{2}{3}\left[(a^2+k^2)^{3/2} - k^3 \right] ,$$

$$Mx_3^* = \rho k \int_0^{\pi} \theta\, d\theta \int_0^a \sqrt{u^2+k^2}\, du = k\rho \frac{\pi}{2} M .$$

244. Să se găsească centrul de masă al unui corp omogen, limitat de pînza unui con circular drept, avînd unghiul la vîrf 2α şi sfera de rază R şi cu centrul în vîrful conului.

Rezolvare. Luăm un reper cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$ cu originea în vîrful conului şi cu axa Ox_3 coincizînd cu axa conului. In acest caz este avantajos să utilizăm coordonate sferice. Avem

(1) $x_1 = r\cos\varphi\sin\theta$, $x_2 = r\sin\varphi\sin\theta$, $x_3 = r\cos\theta$,

unde r este mărimea razei vectoare, φ este logitudinea, iar θ colatitudinea.

Ecuaţia sferei este $r = R$, iar ecuaţia conului este $\theta = \alpha$. Pentru corpul din enunţul problemei rezultă că $r \in (0, R)$,

$\varphi \in (0, 2\pi)$ şi $\theta \in (0, \alpha)$.

In baza transformării de coordonate (1), deducem

$$d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 = r^2 \sin\theta \, dr d\varphi \, d\theta \ .$$

Astfel, obţinem

$$M = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta = \frac{2\pi}{3} R^3 (1 - \cos\alpha) \ , \ x_1^* = x_2^* = 0,$$

$$Mx_3^* = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{\pi R^4}{4} (1 - \cos^2\alpha) \ .$$

Prin urmare, coordonatele centrului de masă sînt

$$x_1^* = x_2^* = 0 \ , \ x_3^* = \frac{3}{8} R(1 + \cos\alpha) \ .$$

In particular, pentru o semisferă ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) , găsim

$$x_1^* = x_2^* = 0 \ , \ x_3^* = \frac{3R}{8} \ .$$

245. Să se afle centrul de masă al corpului omogen delimitat de sfera

(1) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \ ,$$

de cilindrul

(2) $$x_1^2 + x_2^2 - Rx_1 = 0$$

şi de planele $x_2 = x_3 = 0$.

Rezolvare. Corpul cuprins între sfera (1) şi cilindrul (2) se numeşte „domul lui Viviani" (v. şi problemele 130 şi 191). Trebuie să găsim coordonatele centrului de masă al unui sfert din domul lui Viviani şi anume este vorba de porţiunea corpului respectiv situată în primul octant al axelor de coordonate. Utilizarea coordonatelor cilindrice simplifică mult calculele. Avem

(3) $$x_1 = r\cos\theta \ , \ x_2 = r\sin\theta \ , \ x_3 = z \ ,$$

prin urmare

(4) $$d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 = r dr d\theta \, dz \ .$$

In coordonate cilindrice ecuaţiile (1) şi (2) devin respectiv

$$r^2 + z^2 = R^2 , \quad r - R\cos\theta = 0 .$$

Pentru domeniul de care ne ocupăm, avem

$$\theta\in(0,\frac{\pi}{2}) , \ r\in(0,R\cos\theta), \ z\in(0,\sqrt{R^2-r^2}) .$$

Astfel, rezultă

$$M = \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} rdr \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} dz = \frac{3\pi-4}{18} R^3 ,$$

$$Mx_1^* = \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{R\cos\theta} r^2dr \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} dz = \frac{2}{15} R^4 ,$$

$$Mx_2^* = \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{R\cos\theta} r^2dr \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} dz = \frac{15\pi-32}{240} R^4 ,$$

$$Mx_3^* = \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} rdr \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} dz = \frac{5\pi}{128} R^4 ,$$

de unde

$$x_1^* = \frac{12\,R}{5(3\pi-4)} , \ x_2^* = \frac{3(15\pi-32)R}{40(3\pi-4)} , \ x_3^* = \frac{135\,\pi\,R}{64(3\pi-4)} .$$

Observaţie. Centrul de masă al jumătăţii domului lui Viviani din semispaţiul $x_3 > 0$ are coordonatele

$$x_1^* = \frac{12\,R}{5(3\pi-4)} , \ x_2^* = 0 , \ x_3^* = \frac{135\,\pi\,R}{64(3\pi-4)} ,$$

iar pentru întreg corpul avem

$$x_1^* = \frac{12\,R}{5(3\pi-4)} , \ x_2^* = x_3^* = 0 .$$

246. Să se determine o curbă plană care trece prin origine, astfel încît densitatea de masă să fie o funcţie dată de lungimea arcului s al curbei $f(s)\in C^1$, iar ordonata centrului de masă al unui arc de lungime s, socotit de la origine, să fie o

altă funcţie dată $\varphi(s) \in C^1$. Caz particular : $f(s) = as^m$, $\varphi(s) = bs^n$.

Rezolvare. Fie $x_1 O x_2$ planul curbei căutate. Cu notaţiile obişnuite, avem $\rho = f(s)$ şi $x_2^* = \varphi(s)$, unde $\varphi(0) = 0$. Trebuie să găsim funcţiile $x_\alpha = x_\alpha(s)$, $\alpha = 1,2$.

Rezultă

$$(1) \qquad M = \int_0^s f(u)du \ , \quad M\varphi(s) = \int_0^s f(u)x_2(u)du \ .$$

Prin urmare, funcţia necunoscută $x_2(s)$ satisface egalitatea

$$(2) \qquad \int_0^s f(u)x_2(u)du = \varphi(s)\int_0^s f(u)du \ .$$

Aceasta este o ecuaţie integrală liniară Volterra de specia I cu nucleu continuu. Presupunînd existenţa unei soluţii continue pentru (2) putem lua derivatele ambilor membri ai acestei ecuaţii. In felul acesta obţinem

$$(3) \qquad x_2(s) = \frac{\varphi'(s)}{f(s)}\int_0^s f(u)du + \varphi(s) \ .$$

Se poate arăta că, în adevăr, funcţia (3) este soluţia ecuaţiei (2). Inlocuind pe x_2 din (3) în (2) găsim

$$(*) \qquad \int_0^s \varphi'(u)\left\{\int_0^u f(\tau)d\tau\right\}du + \int_0^s f(u)\varphi(u)du = \varphi(s)\int_0^s f(u)du \ .$$

Cu ajutorul unei integrări prin părţi, putem scrie

$$\int_0^s \varphi'(u)\left\{\int_0^u f(\tau)d\tau\right\}du = \varphi(s)\int_0^s f(u)du - \int_0^s f(u)\varphi(u)du \ ,$$

prin urmare, egalitatea (*) este verificată în mod identic.

Pentru determinarea funcţiei $x_1(s)$ folosim formula

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 \ ,$$

unde pe x_2 îl înlocuim cu expresia sa (3). Deducem

$$(4) \qquad x_1(s) = \int_0^s \left[1 - x_2'^2(u)\right]^{1/2} du \ .$$

Relaţiile (3) şi (4) reprezintă ecuaţiile parametrice ale curbei căutate.

In cazul particular propus, ecuaţia (3) devine

$$(5) \qquad x_2 = \frac{m+n+1}{m+1} bs^n = \frac{c}{n} s^n \ , \ c = nb\frac{m+n+1}{m+1} .$$

Deoarece funcţia $\varphi(s)$ este presupusă de clasă C^1 pentru $s \geqslant 0$, rezultă că trebuie să avem $n \geqslant 1$.

Ecuaţia (4) se reduce la

$$(6) \qquad x_1 = \int_0^s (1 - c^2u^{2n-2})^{1/2} du .$$

Integrala binomă din (6) se poate explicita dacă şi numai dacă unul dintre numerele $\frac{1}{2(n-1)}$, $\frac{1}{2(n-1)}n$ este întreg .

In continuare vom pune în evidenţă trei cazuri remarcabile:

1^o Fie $n = 1$, deci, $x_2 = cs$. Se găseşte $x_1 = \sqrt{1-c^2}\, s$, astfel încît curba căutată este o dreaptă.

2^o Pentru $n = \frac{3}{2}$, avem $x_2 = \frac{2}{3} cs^{3/2}$ şi

$$x_1 = \int_0^s (1-c^2u)^{1/2} du = \frac{2}{3c^2}\left[1 - (1-c^2s)^{3/2}\right] ,$$

prin urmare, am găsit astroida

$$(x_1 - \frac{2}{3c^2})^{2/3} + x_2^{2/3} = (\frac{2}{3c^2})^{2/3} .$$

3^o Dacă $n = 2$, atunci $x_2 = \frac{1}{2} cs^2$. Ecuaţia (6) dă

$$x_1 = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1-2cu}{2cu}}\, du .$$

Punînd

$$x_2 = \frac{1}{2c} \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4c}(1 - \cos\varphi) ,$$

obţinem

$$x_1 = \frac{1}{4c}(\varphi + \sin\varphi) ,$$

deci, curba căutată este o cicloidă.

247. Să se calculeze momentele de inerţie :

1° ale unui paralelipiped omogen,

2° dreptunghi omogen,

3° segment de dreaptă omogen.

Rezolvare. 1°. Fie $2a_i$, $i = 1,2,3$, dimensiunile corpului şi $\rho = const.$ masa specifică a sa. Luăm un reper cartezian $Ox_1x_2x_3$ cu originea O în centrul de masă şi axele coincizînd cu axele de simetrie ale corpului (axa Ox_i fiind paralelă cu muchiile paralelipipedului de lungime $2a_i$) .

Avem

$$M = \rho \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_2}^{a_2}\int_{-a_3}^{a_3} dx_1dx_2dx_3 = 8a_1a_2a_3\rho \,. \tag{1}$$

Notăm cu I_i momentul de inerţie faţă de planul $x_i = 0$, adică

$$I_i = \int_D x_i^2 \, dm \,, \quad i = \overline{1,3} \tag{2}$$

unde D reprezintă domeniul ocupat de corp.

Deducem

$$I_i = \frac{1}{3} Ma_i^2 \,, \quad i = \overline{1,3} \,. \tag{3}$$

Momentele de inerţie axiale au expresiile

$$I_{ii} = I_j + I_k \,, \quad \text{(nesumat)} \,, \tag{4}$$

unde $i \neq j \neq k \neq i$ şi $i,j,k = 1,2,3$, sau

$$I_{ii} = I_o - I_i \,, \quad \text{(nesumat)}, \; i = \overline{1,3}, \tag{5}$$

în care I_o este momentul de inerţie polar

$$I_o = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2}(I_{11}+I_{22}+I_{33}) \,. \tag{6}$$

Rezultă

$$I_{ii} = \frac{1}{3} M(a_j^2 + a_k^2) \,, \quad \text{(nesumat)} \,, \tag{7}$$

$i \neq j \neq k \neq i$ şi $i,j,k = 1,2,3$. De asemenea, avem

$$I_o = \frac{1}{3} M(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \,. \tag{8}$$

Pentru a calcula momentul de inerţie în raport cu o muchie a paralelipipedului, aplicăm teorema lui Steiner (11.10). Aştfel, momentul de inerţie al paralelipipedului faţă de muchia (Δ) de lungime $2a_i$ este

(9) $I_\Delta = I_{ii}+M(a_j^2+a_k^2)= \frac{4}{3}M(a_j^2+a_k^2)=4\ I_{ii}$, (nesumat) ,

$i \neq j \neq k \neq i$ şi $i,j,k = 1,2,3$.

Momentul de inerţie al paralelipipedului relativ la o diagonală (Δ) a sa se calculează cu ajutorul formulei (11.12). Mai întîi, observăm că axele de coordonate, aşa cum au fost alese, sînt axe principale de inerţie, adică avem

$$I_{23} = I_{31} = I_{12} = 0 ,$$

fapt ce se verifică imediat. In cazul de faţă axele de coordonate sînt chiar axe principale centrale de inerţie.

Direcţia diagonalei (Δ) are cosinusurile directoare

(10) $$u_i = \pm \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \quad , \quad i = \overline{1,3} ,$$

prin urmare, găsim

(11) $$I_\Delta = I_{11}u_1^2+I_{22}u_2^2+I_{33}u_3^2= \frac{2M}{3} \cdot \frac{a_2^2a_3^2+a_3^2a_1^2+a_1^2a_2^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2} .$$

2° Pentru dreptunghi putem face un calcul analog, sau utilizăm rezultatele de la punctul 1°, unde facem ca una dintre dimensiunile paralelipipedului să tindă către zero. De exemplu, pentru $a_3 \longrightarrow 0$ obţinem

(12) $I_{\alpha\alpha} = \frac{1}{3}Ma_\beta^2$, (nesumat), $\alpha \neq \beta$; $\alpha,\beta = 1,2$, $M = 4a_1a_2\rho$.

Momentul de inerţie al dreptunghiului faţă de muchia sa (Δ) de lungime $2a_\alpha$ este

(13) $I_\Delta = \frac{4}{3}Ma_\beta^2 = 4\ I_{\alpha\alpha}$, (nesumat), $\alpha \neq \beta$; $\alpha,\beta = 1,2$,

iar momentul de inerţie în raport cu diagonala (Δ) este

(14) $$I_\Delta = \frac{2M}{3} \cdot \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} .$$

3° Pentru un segment de dreaptă facem încă o dimensiune, de exemplu a_2, să tindă la zero. De asemenea, putem face calculele direct. Pentru prescurtarea scrierii notăm $a_1 = a$. Deducem :

i) Momentul de inerţie al unui segment de dreaptă omogen de lungime 2a faţă de o axă (Δ) care trece prin mijlocul segmentului şi face unghiul constant φ cu acesta este

(15) $$I_\Delta = \frac{Ma^2}{3} \sin^2\varphi \quad , M = 2a\rho \ ;$$

dacă (Δ) este perpendiculară pe mijlocul segmentului ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) , avem

(16) $$I_\Delta = \frac{Ma^2}{3} .$$

ii) Momentul de inerţie al unui segment de dreaptă omogen de lungime 2a faţă de o axă (Δ) care trece prin una din extremităţile segmentului şi face unghiul constant φ cu acesta este

(17) $$I_\Delta = \frac{4Ma^2}{3} \sin^2\varphi .$$

Dacă (Δ) este perpendiculară pe segment în una din extremităţi ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) , avem

(18) $$I = \frac{4Ma^2}{3} .$$

Observaţie. Rezultatele obţinute la această problemă vor fi utilizate în mai multe probleme ulterioare.

248. Sistemul material (Σ) este format din două părţi (Σ') şi (Σ'') . Fie I_Δ, I'_Δ şi I''_Δ momentele de inerţie corespunzătoare lui (Σ), (Σ') şi (Σ'') în raport cu axele (Δ),(Δ') şi (Δ'') paralele între ele şi care trec prin centrele de masă corespunzătoare.

Să se arate că

$$I_\Delta = I'_\Delta + I''_\Delta + \frac{M'M''}{M'+M''} d^2 ,$$

unde M', M'' sînt masele părţilor (Σ'), (Σ'') şi d este distanţa dintre axele centrale (Δ') şi (Δ'').

Rezolvare. Fie d' distanţa dintre axele (Δ') şi (Δ), d'' distanţa dintre axele (Δ'') şi (Δ) şi I'_Δ, I''_Δ momentele de inerţie ale sistemelor materiale (Σ'), (Σ'') în raport cu axa (Δ).

Pe de o parte, după definiţia momentului de inerţie, avem

(1) $$I_\Delta = I'_\Delta + I''_\Delta ,$$

iar după teorema lui Steiner (11.10).

(2) $$I'_\Delta = I'_{\Delta'} + M'd'^2 , \quad I''_\Delta = I''_{\Delta''} + M''d''^2 .$$

Pe de altă parte, din definiţia centrului de masă, deducem

(3) $$M'd' = M''d'' , \quad d' + d'' = d .$$

Sistemul (3) conduce la

(3') $$d' = \frac{M''}{M'+M''} d , \quad d'' = \frac{M'}{M'+M''} d .$$

Din (1), (2) şi (3') rezultă nemijlocit relaţia din enunţ.

249. Să se afle momentul de inerţie în raport cu punctul O al unui poligon regulat omogen cu n laturi înscris în cercul cu centrul în O şi de rază R.

Rezolvare. Dacă unim centrul O cu cele n vîrfuri ale poligonului se formează n triunghiuri isoscele egale.

Momentul de inerţie în raport cu punctul O al poligonului regulat este egal cu suma momentelor de inerţie faţă de punctul O ale triunghiurilor componente. Însă, din cauza simetriei, momentele de inerţie ale celor n triunghiuri sînt egale între ele. Astfel, dacă notăm cu I_0 momentul polar al poligonului şi cu I'_0 momentul polar al unui triunghi component, avem

$$I_0 = nI'_0 .$$

Pentru calculul lui I_0', fără a micșora generalitatea, putem lua triunghiul ale cărui laturi au ecuațiile

$$x_2 = \pm x_1 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \quad , \quad x_1 = R\cos\frac{\pi}{n} .$$

Atunci

$$I_0' = 2\rho \int_0^{R\cos\frac{\pi}{n}} dx_1 \int_0^{x_1\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} (x_1^2+x_2^2)dx_2 = \frac{R^4\rho}{12}(1+2\cos^2\frac{2\pi}{n})\sin\frac{2\pi}{n},$$

unde ρ reprezintă densitatea de masă, presupusă constantă.

Observînd că masa triunghiului este

$$M' = \frac{R^2\rho}{2}\sin\frac{2\pi}{n} ,$$

putem scrie

$$I_0' = \frac{R^2M'}{6}(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{n}) .$$

Prin urmare

$$I_0 = \frac{R^2M}{6}(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{n}) ,$$

în care $M = nM'$ reprezintă masa poligonului.

250. Să se afle componentele tensorului de inerție pentru un corp omogen definit prin inegalitatea

$$(1) \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leqslant 1 .$$

Rezolvare. Notînd cu ρ densitatea, masa elipsoidului (1) este

$$(2) \qquad M = \frac{4}{3}\pi\rho\, a_1a_2a_3 , \quad (\rho = \text{const.}).$$

Se verifică ușor că axele reperului cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$, la care este raportat elipsoidul (1), sînt axe principale centrale de inerție, adică pentru ele avem

$$(3) \qquad x_i^* = 0, \quad I_{ij} = 0 , \ i \neq j, \quad i,j = 1,2,3,$$

unde x_i^* și I_{ij} sînt definiți prin (11.7) și (11.13) respectiv.

Pentru calcularea momentelor axiale I_{11}, I_{22}, I_{33} este avantajos să facem transformarea de coordonate.

(4) $x_1 = a_1 r\cos\varphi\sin\theta$, $x_2 = a_2 r\sin\varphi\sin\theta$, $x_3 = a_3 r\cos\theta$.

Elipsoidului (1), din spaţiul variabilelor x_1, x_2, x_3, îi corespunde în spaţiul variabilelor r, φ, θ paralelipipedul

$$0 \leq r \leq 1 \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi \ .$$

In noile coordonate avem

$$dx = a_1 a_2 a_3 r^2 \sin\theta \, dr d\theta \, d\varphi \ ,$$

Este mai simplu să calculăm mai întîi momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate şi apoi să găsim momentele de inerţie axiale (v. formulele (2) şi (4) de la problema 247). Deducem

$$I_1 = \rho a_1^3 a_2 a_3 \int_0^1 r^4 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{1}{5} M a_1^2$$

şi, în general

(5) $$I_i = \frac{1}{5} M a_i^2 \ , \quad i = \overline{1,3} \ ,$$

deci

(6) $$I_{ii} = \frac{1}{5} M(a_j^2 + a_k^2) \ , \ (\text{nesumat}),$$

$i \neq j \neq k \neq i$ şi $i,j,k = 1,2,3$.

Momentul de inerţie polar al elipsoidului este

$$I_o = \frac{1}{5} M(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \ .$$

Elipsoidul central de inerţie are ecuaţia

(7) $$(a_2^2+a_3^2)x_1^2 + (a_3^2+a_1^2)x_2^2 + (a_1^2+a_2^2)x_3^2 = \frac{5}{M} \ .$$

Vedem că semiaxele elipsoidului (7) sînt în aceeaşi relaţie de inegalitate ca şi semiaxele elipsoidului dat.

Observaţie. In cazul $a_1 = a_2 = a_3 = R$, elipsoidul (1) se reduce la o sferă, pentru care avem

(8) $$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{5} MR^2 \ , \quad M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \ ,$$

(9) $$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{5} MR^2 \ , \ I_o = \frac{3}{5} MR^2 \ .$$

251. Să se determine momentele de inerție ale unui cilindru circular drept omogen față de un reper cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$ cu originea în centrul cilindrului și cu axa Ox_3 coincizînd cu axa cilindrului.

Rezolvare. Fie R raza cilindrului, 2h înălțimea sa și ρ masa specifică, presupusă constantă.

Corpul respectiv este definit de următoarele inegalități

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 , \quad -h \leq x_3 \leq h . \tag{1}$$

Utilizarea coordonatelor cilindrice simplifică mult calculele (v. formulele (3) și (4) de la problema 245).

Domeniul ocupat de corp este reprezentat prin

$$0 \leq r \leq R , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi , \quad -h \leq z \leq h . \tag{3}$$

Rezultă

$$\begin{cases} I_1 = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} r^3 \cos^2\theta \, dr d\theta \, dz = \frac{1}{4} MR^2 = I_2 , \\ I_3 = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} r z^2 dr d\theta \, dz = \frac{1}{4} Mh^2 , \quad M = 2\pi R^2 h \rho , \end{cases} \tag{4}$$

unde I_1, I_2, I_3 sînt momentele de inerție planare (v. formulele (2) de la problema 247).

Momentele de inerție axiale au valorile

$$I_{11} = I_{22} = \frac{M}{12}(4h^2 + 3R^2) , \quad I_{33} = \frac{1}{2} MR^2 . \tag{5}$$

Observație. In același mod se procedează și în cazul unui tub circular drept omogen, avînd raza exterioară R_1 și cea interioară R_2.

Domeniul (3) se înlocuiește prin

$$R_2 \leq r \leq R_1 , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi , \quad -h \leq z \leq h .$$

252. Să se scrie ecuaţia elipsoidului de inerţie relativ la punctul O al unui corp omogen delimitat de conul

$$x_3^2 = \frac{h^2}{R^2}(x_1^2 + x_2^2)$$

şi de planul $x_3 = h$.

Rezolvare. Masa corpului este

$$M = \frac{\pi R^2 h \rho}{3}, \quad \rho = \text{const.}$$

Vom utiliza coordonate cilindrice (v. formulele (3) şi (4) de la problema 245). Domeniul ocupat de corp este definit prin următoarele inegalităţi

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad h\frac{r}{R} \leq z \leq h.$$

Găsim

$$(1)\quad \begin{cases} I_{11} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{h\frac{r}{R}}^h (r^2\sin^2\theta + z^2) r\,dr\,d\theta\,dz = \frac{3M}{20}(R^2+4h^2), \\ I_{22} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{h\frac{r}{R}}^h (r^2\cos^2\theta + z^2) r\,dr\,d\theta\,dz = \frac{3M}{20}(R^2+4h^2), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} I_{33} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{h\frac{r}{R}}^h r^3\,dr\,d\theta\,dz = \frac{3}{10}MR^2, \\ I_{23} = I_{31} = I_{12} = 0. \end{cases}$$

Astfel, ecuaţia elipsoidului de inerţie relativ la origine este

$$(R^2 + 4h^2)(x_1^2 + x_2^2) + 2R^2x_3^2 = \frac{20}{3M},$$

deci este tot un corp de rotaţie cu axa Ox_3.

Observaţie. Din compararea relaţiilor (9) de la problema 250, (5) de la problema 251 şi $(2)_1$ de la problema actuală, deducem că momentele de inerţie ale sferei, cilindrului şi conului faţă de axa lor, pot fi concentrate în formula unică

$$I_{33} = kMR^2 ,$$

în care : k = 0,3 pentru con, k = 0,4 pentru sferă şi k=0,5 pentru cilindru.

Presupunînd că cele trei solide au aceeaşi masă şi aceeaşi rază, putem scrie

$$I^2_{33\text{cilindru}} = I^2_{33\text{con}} + I^2_{33\text{sferă}} .$$

253. Să se afle momentele principale de inerţie şi axele principale de inerţie pentru un cub omogen cu muchia 2a, relative la un vîrf al cubului.

Rezolvare. Luăm reperul $Ox_1x_2x_3$ cu originea în unul dintre vîrfurile cubului şi cu axele de-a lungul muchiilor cubului care se întîlnesc în acel vîrf.

Momentele de inerţie axiale se pot determina din formulele (9) de la problema 247, unde punem $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Se obţine

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{8}{3} Ma^2 . \tag{1}$$

Pentru momentele centrifuge se găseşte

$$I_{23} = I_{31} = I_{12} = -\rho \int_0^{2a}\int_0^{2a}\int_0^{2a} uvdudvdw = -Ma^2 . \tag{2}$$

Momentele principale de inerţie sînt date de ecuaţia (11.17), care în cazul actual se scrie

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{3}Ma^2 - \lambda & -Ma^2 & -Ma^2 \\ -Ma^2 & \frac{8}{3}Ma^2 - \lambda & -Ma^2 \\ -Ma^2 & -Ma^2 & \frac{8}{3}Ma^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

sau

$$(3\lambda)^3 - 24Ma^2(3\lambda)^2 + 165M^2a^4(3\lambda) - 242M^3a^6 = 0 . \tag{3}$$

Rădăcinile ecuaţiei (3) reprezintă momentele principale de inerţie

$$I'_{11} = \frac{2}{3} Ma^2, \quad I'_{22} = I'_{33} = \frac{11}{3} Ma^2 . \tag{4}$$

Să determinăm acum axele principale de inerţie. Direcţiile acestor axe se numesc direcţii principale de inerţie relative la punctul respectiv. Notăm cu (Δ_i) axele principale de inerţie şi cu $\bar{u}^{(i)}$, $i = 1,3$, versorii lor.

Versorul $\bar{u}^{(1)}$ se află din sistemul

$$(I_{ij} - I'_{11}\delta_{ij})u_i^{(1)} = 0,\quad u_i^{(1)}u_i^{(1)} = 1,$$

sau

$$(5)\quad 2u_1^{(1)} - u_2^{(1)} - u_3^{(1)} = 0,\quad -u_1^{(1)} + 2u_2^{(1)} - u_3^{(1)} = 0,\quad u_i^{(1)}u_i^{(1)} = 1.$$

Din (5) obţinem

$$(6)\qquad u_1^{(2)} = u_2^{(1)} = u_3^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

deci (Δ_1) are ca suport diagonala cubului dusă prin O.

Deoarece $I'_{22} = I'_{33}$ versorii $\bar{u}^{(2)}$ şi $\bar{u}^{(3)}$ verifică aceleaşi ecuaţii şi anume

$$(I_{ij} - I'_{22}\delta_{ij})u_i = 0,\quad u_iu_i = 1,$$

sau

$$(7)\qquad u_1 + u_2 + u_3 = 0,\quad u_iu_i = 1,$$

unde, în loc de $u_i^{(2)}$ şi $u_i^{(3)}$, am folosit notaţia generică u_i.

Prin urmare, pentru (Δ_2) şi (Δ_3) avem nedeterminare. Relaţiile (6) şi $(7)_1$ ne arată că

$$u_i^{(1)}u_i = 0,$$

deci direcţiile (Δ_2) şi (Δ_3) sînt ortogonale cu (Δ_1).

Rezultă că direcţiile principale de inerţie (Δ_2) şi (Δ_3) se află în planul normal în punctul O pe direcţia (Δ_1). In acest plan ele sînt nedeterminate, astfel încît pot fi luate ortogonale între ele.

Capitolul XII

SISTEME DE FORŢE

Considerăm un sistem de n puncte materiale P_i, de mase m_i şi de vectori de poziţie $\bar{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$, $1 \leq i \leq n$. Forţele care acţionează asupra punctelor sistemului material se împart în forţe externe şi forţe interne.

Forţele externe reprezintă acţiunile exercitate asupra punctelor sistemului de către unele corpuri materiale care nu aparţin sistemului considerat. Notăm cu $\bar{F}_i$ rezultanta forţelor externe care lucrează asupra punctului P_i.

Rezultanta forţelor exterioare care acţionează asupra sistemului de puncte materiale şi momentul rezultant al lor faţă de punctul O sînt respectiv

$$(12.1) \qquad \bar{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i , \qquad \bar{\mathcal{M}}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i .$$

Forţele interne reprezintă acţiunile mutuale ale punctelor sistemului. Notăm cu $\bar{F}_{ij}$ forţa exercitată de punctul P_j asupra punctului P_i. Aceste forţe satisfac principiul acţiunii şi reacţiunii, adică

$$(12.2) \qquad \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 , \quad \overrightarrow{P_iP_j} \times \bar{F}_{ij} = 0 , \text{ (nesumat).}$$

Diversele forţe care acţionează asupra unui corp continuu se clasifică pe de o parte în forţe de masă şi forţe de suprafaţă, pe de altă parte în forţe externe şi forţe interne. Forţele de suprafaţă se consideră numai în cazul mediilor

continue deformabile, aşa că nu vom avea de-a face cu ele în continuare, deoarece ne vom ocupa numai cu sisteme mecanice cu un număr finit de grade de libertate (exceptînd statica firelor).

Forţele masice externe pot fi concentrate (cînd lucrează asupra unor puncte izolate ale corpului), sau distribuite în toate punctele unui volum, unei suprafeţe sau unei curbe, după forma corpului material. In domeniul D ocupat de corp se defineşte o distribuţie de forţe externe sau o măsură vectorială, ca o funcţie vectorială numărabil aditivă de mulţime. Această măsură o notăm cu $\bar{\Phi}(e)$ şi reprezintă rezultanta forţelor cu care materia din exteriorul lui D lucrează asupra submulţimii deschise e a lui D . In fiecare punct $P \in D$, în general, se poate defini un vector $\bar{\mathcal{F}}$, numit forţă exterioară specifică de volum, de arie sau de lungime şi reprezintă forţa exterioară raportată la unitate de volum, de arie sau de lungime. De asemenea, putem defini în fiecare punct $P \in D$ un vector $\bar{F}$, numit forţă externă specifică de masă, care reprezintă forţa exterioară raportată la unitatea de masă. Dacă există o densitate de masă $\rho(P)$, atunci avem

$$\bar{\mathcal{F}}(P) = \rho(P)\bar{F}(P) , \quad P \in D . \tag{12.3}$$

Măsura $\bar{\Phi}(e)$ este produsul măsurii $m(e)$ (v.cap.XI) cu funcţia $\bar{F}(P)$, adică $\bar{\Phi}(e)$ este măsura cu densitatea $\bar{F}(P)$ şi baza $m(e)$. Legătura dintre funcţia de mulţime $\bar{\Phi}(e)$ şi funcţia de punct $\bar{F}(P)$ este dată de

$$\bar{\Phi}(e) = \int_e \bar{F}(P)dm . \tag{12.4}$$

Rezultanta forţelor exterioare care acţionează asupra masei din D este

(12.5) $$\bar{\mathcal{R}} = \bar{\Phi}(D) = \int_D d\bar{\Phi} = \int_D \bar{F}(P)dm ,$$

iar momentul rezultant al lor în raport cu punctul O este

(12.6) $$\bar{\mathcal{M}}_O = \int_D \bar{r} \times d\bar{\Phi} = \int_D (\bar{r} \times \bar{F}(P))dm , \quad \bar{r} = \overrightarrow{OP} .$$

Dacă schimbăm originea momentului rezultant în O' avem

(12.7) $$\bar{\mathcal{M}}_{O'} = \bar{\mathcal{M}}_O + \overrightarrow{O'O} \times \bar{\mathcal{R}} .$$

Momentul rezultant în raport cu o axă fixă (Δ) de versor $\bar{u}$, care trece prin O, este

(12.8) $$\bar{\mathcal{M}}_u = \bar{\mathcal{M}}_O \cdot \bar{u} = \int_D (\bar{u}, \bar{r}, d\bar{\Phi}) = \int_D (\bar{u}, \bar{r}, \bar{F}(P))dm .$$

In cazul cînd distribuţia de masă constă dintr-un număr finit de mase punctuale (cazul menţionat la începutul capitolului), măsura vectorială corespunzătoare se reduce la un sistem elementar de forţe aplicate într-un număr finit de puncte.

In acelaşi mod se prezintă şi forţele de masă interne. În plus, ele satisfac principiul acţiunii şi reacţiunii, fapt ce are următoarea consecinţă:

Rezultanta forţelor interioare şi momentul rezultant al lor în raport cu un punct arbitrar din spaţiu sînt nule.

Vectorii $\bar{F}(P)$ şi $\bar{\mathcal{R}}$ se consideră ca vectori liberi. Dacă rezultanta $\bar{\mathcal{R}} = 0$, vectorul $\bar{\mathcal{M}}_O$ poate fi considerat ca un vector liber, deoarece el este invariant faţă de schimbarea polului.

Dacă $\bar{\mathcal{R}} \neq 0$, atunci produsul $\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{M}}_O$ este un invariant al sistemului de forţe sau al măsurii vectoriale $\bar{F}(e)$. Mulţimea punctelor O' din spaţiu pentru care rezultanta $\bar{\mathcal{R}}$ şi momentul rezultant $\bar{\mathcal{M}}_{O'}$ sînt coliniare este o dreaptă numită axă centrală a sistemului de forţe.

Ecuaţia vectorială a axei centrale este

(12.9) $$\bar{r} = \frac{\bar{\mathcal{R}} \times \bar{\mathcal{M}}_O}{\mathcal{R}^2} + \lambda \bar{\mathcal{R}} ,$$

unde λ este un parametru scalar.

Faţă de un punct O' al axei centrale (12.9) momentul rezultant este

(12.10) $$\bar{\mathcal{M}}_{O'} = \frac{\bar{\mathcal{R}} \bar{\mathcal{M}}_O}{\mathcal{R}^2} \bar{\mathcal{R}} ,$$

iar mărimea sa este minimă.

Compararea sistemelor de forţe care lucrează asupra unui sistem material dat se reduce la compararea măsurilor vectoriale.

Două sisteme de forţe care acţionează asupra unui sistem mecanic sînt echivalente dacă au aceeaşi rezultantă şi acelaşi moment rezultant în raport cu un punct O.

Prin reducerea unui sistem de forţe se înţelege găsirea celui mai simplu sistem de forţe, echivalent cu sistemul dat.

Există următoarele cazuri de reducere ale unui sistem de forţe:

A. $\bar{\mathcal{R}} = 0$, $\bar{\mathcal{M}}_O = 0$, sistem echivalent cu zero.

B. $\bar{\mathcal{R}} = 0$, $\bar{\mathcal{M}}_O \neq 0$, sistem echivalent cu un cuplu de forţe.

C. $\bar{\mathcal{R}} \neq 0$, $\bar{\mathcal{R}} \bar{\mathcal{M}}_O = 0$, sistem echivalent cu o forţă unică.

D. $\bar{\mathcal{R}} \neq 0$, $\bar{\mathcal{R}} \bar{\mathcal{M}}_O \neq 0$, sistem echivalent cu o forţă unică şi un cuplu.

Polul O se numeşte centrul de reducere al sistemului de forţe.

Cazuri particulare de forţe care intervin frecvent în aplicaţii:

a. Forţe concurente. Sînt posibile numai cazurile A şi C.

b. Forţe coplanare. Sînt posibile numai cazurile A, B şi C.

c. Forţe paralele. Dacă $\bar{F}(P) = F(P)\bar{u}$, unde $\bar{u}$ este un versor de direcţie fixă, avem

(12.11) $$\bar{\mathcal{R}} = \bar{u} \int_D F(P)dm , \quad \bar{\mathcal{M}}_O = -\bar{u} \times \int_D \bar{r} F(P)dm .$$

Sînt posibile următoarele cazuri :

i) $\int_D F(P)dm = 0$ și $\overline{\mathcal{M}}_O = 0$, sistemul este echivalent cu zero.

ii) $\int_D F(P)dm = 0$ și $\overline{\mathcal{M}}_O \neq 0$, sistemul este echivalent cu un cuplu.

iii) $\int_D F(P)dm \neq 0$. Punctul G definit prin

$$\overline{r}_G = \frac{\int_D \overline{r}F(P)dm}{\int_D F(P)dm}, \tag{12.12}$$

se numește centrul sistemului de forțe paralele. In acest caz avem

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{r}_G \times \overline{\mathcal{R}} \tag{12.13}$$

și sistemul de forțe se reduce la o forță unică egală cu rezultanta $\overline{\mathcal{R}}$, aplicată într-un punct al axei centrale.

In cazul special al forțelor de greutate, cînd $\overline{F}(P) = \overline{g}$, punctul G se numește centrul de greutate al sistemului material Poziția centrului de greutate al unui sistem material coincide cu poziția centrului de masă al sistemului (v.cap.XI). Rezultanta forțelor de greutate care acționează asupra unui corp se numește greutatea totală a corpului, se notează cu $\overline{G}$ și are expresia

$$\overline{G} = \int_D \overline{g}dm = M\overline{g}. \tag{12.14}$$

254. Se consideră n puncte materiale P_j situate pe parabola $x_1^2 = 2px_2$ și avînd abscisele $x_1^{(j)} = ja$, $1 \leq j \leq n$. Știind că originea O acționează asupra punctelor P_j cu forțe elastice care au același coeficient, să se afle rezultanta acestor forțe.

Rezolvare. Fie $\overline{F}_j$ forța cu care punctul O acționează asupra lui P_j. Fiind vorba de o forță elastică, adică o forță de atracție proporțională cu distanța, avem

$$\vec{F}_j = -k\overrightarrow{OP}_j \quad , \quad k = \text{const.} > 0 \ .$$

Din ecuația parabolei rezultă că ordonata lui P_j este $x_2^{(j)} = \frac{j^2a^2}{2p}$, astfel încît deducem

$$\overrightarrow{OP}_j = ja\bar{e}_1 + \frac{j^2a^2}{2p}\bar{e}_2 \ .$$

Așadar

$$\vec{R} = -k\sum_{j=1}^{n}\overrightarrow{OP}_j = -ak\Big(\sum_{j=1}^{n} j\Big)\bar{e}_1 - \frac{a^2k}{2p}\Big(\sum_{j=1}^{n} j^2\Big)\bar{e}_2 \ .$$

Deoarece

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \ , \quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ,$$

obținem

$$\vec{R} = -\frac{akn(n+1)}{12p}\left[6p\bar{e}_1 + a(2n+1)\bar{e}_2\right] .$$

255. Să se arate că un segment rectiliniu omogen $\overline{A_1A_2}$, dotat cu o atracție newtoniană, atrage un punct O situat la distanța R de dreapta A_1A_2, la fel ca un arc de cerc cu centrul în O, de rază R, delimitat de dreptele OA_1, OA_2 și de aceeași densitate ρ cu segmentul $\overline{A_1A_2}$.

Rezolvare. Luăm un sistem de coordonate x_1Ox_2 cu originea în O, axa Ox_1 perpendiculară pe dreapta A_1A_2 și axa Ox_2 paralelă cu această dreaptă. Fie a_1, a_2 ordonatele punctelor A_1, A_2 și B_1, B_2 extremitățile arcului de cerc (v.fig.23).

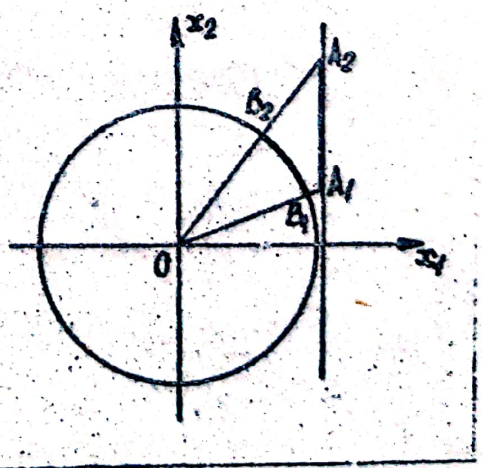

Fig.23

Facem notațiile

$$(1)\begin{cases} \alpha_1 = \sphericalangle(Ox_1, OA_1) = \operatorname{arctg}\dfrac{a_1}{R} \ , \\ \alpha_2 = \sphericalangle(Ox_1, OA_2) = \operatorname{arctg}\dfrac{a_2}{R} \ . \end{cases}$$

Forța exterioară specifică de masă în punctul P al segmentului

$\overline{A_1A_2}$ este de forma

$$(2)\quad \bar{F}_1(P) = k\frac{\overrightarrow{OP}}{\overline{OP}^3} = k\frac{R\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2}{(R^2+x_2^2)^{3/2}}\,,\quad x_2\in[a_1,a_2]\,,$$

unde k este o constantă pozitivă (k reprezintă produsul dintre constanta atracţiei universale şi masa punctului O).

Forţa cu care segmentul $\overline{A_1A_2}$ atrage punctul O este dată de

$$(3)\qquad \bar{\mathcal{R}}_1 = k\rho\int_{a_1}^{a_2}\frac{R\bar{e}_1+u\bar{e}_2}{(R^2+u^2)^{3/2}}\,du\,.$$

Avem

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{u\,du}{(R^2+u^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2}(R^2+u^2)^{-3/2}\,d(R^2+u^2) = \frac{1}{\sqrt{R^2+a_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+a_2^2}}$$

şi, făcînd substituţia $u = R\,tg\theta$, găsim

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{R\,du}{(R^2+u^2)^{3/2}} = \frac{1}{R}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{R}\left(\frac{a_2}{\sqrt{R^2+a_2^2}} - \frac{a_1}{\sqrt{R^2+a_1^2}}\right),$$

de unde obţinem

$$(4)\quad \bar{\mathcal{R}}_1 = \frac{k\rho}{R}\left[\left(\frac{a_2}{\sqrt{R^2+a_2^2}} - \frac{a_1}{\sqrt{R^2+a_1^2}}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{R}{\sqrt{R^2+a_1^2}} - \frac{R}{\sqrt{R^2+a_2^2}}\right)\bar{e}_2\right].$$

De asemenea, forţa externă specifică de masă într-un punct P al arcului $\overset{\frown}{B_1B_2}$ are forma

$$(5)\quad \bar{F}_2(P) = k\frac{\overrightarrow{OP}}{\overline{OP}^3} = \frac{k}{R^2}(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta)\,,\quad \theta\in[\alpha_1,\alpha_2]\,,$$

unde θ este unghiul lui $\overrightarrow{OP}$ cu semiaxa Ox_1 pozitivă.

Rezultanta forţelor cu care arcul $\overset{\frown}{B_1B_2}$ atrage punctul O este

$$(6)\qquad \bar{\mathcal{R}}_2 = \frac{k\rho}{R}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{k\rho}{R}\left[\left(\frac{a_2}{\sqrt{R^2+a_2^2}} - \frac{a_1}{\sqrt{R^2+a_1^2}}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{R}{\sqrt{R^2+a_1^2}} - \frac{R}{\sqrt{R^2+a_2^2}}\right)\bar{e}_2\right].$$

După cum se vede expresiile lui $\bar{\mathcal{R}}_1$ și $\bar{\mathcal{R}}_2$ sînt egale, prin urmare, proprietatea este dovedită.

Observații. 1° Expresia comună a lui $\bar{\mathcal{R}}_1$ și $\bar{\mathcal{R}}_2$, pe care o notăm cu $\bar{\mathcal{R}}$, se poate scrie sub forma

$$(7)\qquad \bar{\mathcal{R}} = \frac{k\rho}{R}\left[\left(\frac{a_2}{OA_2} - \frac{a_1}{OA_1}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{R}{OA_1} - \frac{R}{OA_2}\right)\bar{e}_2\right].$$

2° In cazul particular în care $a_1 = 0$, avem

$$(7')\qquad \bar{\mathcal{R}} = \frac{k\rho}{R\cdot OA_2}(a_2\bar{e}_1 - R\bar{e}_2).$$

3° Pentru cazul simetric $a_1 = -a_2$, obținem

$$(7'')\qquad \bar{\mathcal{R}} = \frac{2k\rho\, a}{R\cdot OA_2}\bar{e}_1 = \frac{kM_1\bar{e}_1}{R\cdot OA_2} = \frac{kM_2}{R^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\bar{e}_1 =$$

$$= \frac{kM_2}{R^2}\cdot\frac{\text{coarda } A_1A_2}{\text{arcul } B_1B_2}\bar{e}_1,$$

unde $a = a_2$, $M_1 = 2a\rho$ este masa segmentului $\overline{A_1A_2}$, $\alpha = \text{arctg}\frac{a}{R}$ și $M_2 = 2\alpha R\rho$ este masa arcului $\overset{\frown}{B_1B_2}$.

256. Particulele unui corp omogen sînt atrase de un punct O proporțional cu distanțele respective. Să se afle forța exercitată de punctul O asupra corpului.

Rezolvare. Forța exterioară specifică de masă într-un punct P al corpului considerat este de forma

$$\bar{F}(P) = -k\cdot\overrightarrow{OP}, \quad k = \text{const.} > 0.$$

Rezultanta forțelor cu care punctul O acționează asupra masei corpului este

$$\bar{\mathcal{R}} = -k\int_{\mathcal{D}}\overrightarrow{OP}\,dm = -kM\bar{r}^{\circ},$$

unde M este masa corpului, iar $\bar{r}^*$ vectorul de poziţie faţă de punctul O al centrului de masă al corpului.

Prin urmare, forţa cu care punctul O atrage corpul dat este egală cu forţa de atracţie proporţională cu distanţa pe care o exercită punctul O asupra unui punct material aflat în centrul de masă al corpului şi dotat cu o masă egală cu masa totală a corpului.

257. Să se arate că dacă un sistem de forţe are momentul rezultant nul faţă de trei puncte necoliniare, el este echivalent cu zero. In cazul unor forţe paralele, dacă momentul rezultant este nul faţă de două puncte, care nu sînt situate pe o dreaptă paralelă cu forţele, sistemul de forţe este echivalent cu zero.

Rezolvare. Presupunem că momentul rezultant în raport cu punctele O, O_1 şi O_2 este nul. In acest caz formula (12.7) ne conduce la

(1) $$\overrightarrow{OO_1} \times \bar{\mathcal{R}} = 0 , \quad \overrightarrow{OO_2} \times \bar{\mathcal{R}} = 0 .$$

Deoarece punctele O, O_1, O_2 sînt presupuse necoliniare, deducem că vectorii $\overrightarrow{OO_1}$ şi $\overrightarrow{OO_2}$ nu sînt coliniari, astfel încît din (1) rezultă $\bar{\mathcal{R}} = 0$.

Cum $\bar{\mathcal{R}} = 0$ şi $\bar{\mathcal{M}}_O = 0$, din (12.7) urmează că $\bar{\mathcal{M}}_{O'} = 0$, oricare ar fi punctul O'. Prin urmare, sistemul de forţe este echivalent cu zero (v. cazul A de reducere).

Dacă avem un sistem de forţe paralele de versor $\bar{u}$ şi

(2) $$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{\mathcal{M}}_{O_1} = 0 , \quad \overrightarrow{OO_1} \times \bar{u} \neq 0 ,$$

atunci din (12.7) şi $(12.11)_1$ obţinem

(3) $$(\overrightarrow{OO_1} \times \bar{u})\,\bar{\mathcal{R}} = 0 , \quad \bar{\mathcal{R}} = \int_D F(P)\,dm .$$

Relaţiile $(2)_2$ şi (3) arată că $\bar{\mathcal{R}} = 0$, adică rezultanta

forţelor este nulă. Acest fapt, împreună cu formula (12.7) ne conduc la $\overline{\mathcal{M}}_{O'} = 0$, oricare ar fi punctul O'. Cu aceasta proprietatea este dovedită.

258. Să se arate că centrul forţelor paralele şi egale, ale căror puncte de aplicaţie împart într-un acelaşi raport laturile unui poligon dat este independent de raportul adoptat.

Rezolvare. Considerăm un poligon cu n laturi ale căror vîrfuri le notăm cu A_i, $i = \overline{1,n}$ (v. şi problema 216). Fie B_i punctul care împarte latura $\overline{A_iA_{i+1}}$, $i = \overline{1,n}$, $A_{n+1} \equiv A_1$, în raportul λ. Prin urmare, avem

$$\overrightarrow{A_iB_i} = \lambda \overrightarrow{B_iA_{i+1}}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \lambda > 0,$$

sau

$$\overrightarrow{OB_i} = \frac{\overrightarrow{OA_i} + \lambda \overrightarrow{OA_{i+1}}}{1+\lambda}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

unde O este un punct din planul poligonului.

Prin ipoteză în punctele B_i sînt aplicate forţe paralele, de acelaşi sens şi de mărimi egale. Astfel, dacă notăm cu $\overline{F}_i$ forţa aplicată în punctul B_i, avem

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = \ldots = \overline{F}_n = F\overline{u}, \tag{2}$$

unde F este mărimea comună a celor n forţe $\overline{F}_i$, iar $\overline{u}$ este versorul direcţiei lor.

Vectorul de poziţie al centrului forţelor paralele $\overline{F}_i$, $i = \overline{1,n}$, se determină cu ajutorul formulei (12.12). In cazul actual avem

$$\int_D F(P)dm = \sum_1^n F_i = nF \tag{3}$$

şi

$$\int_D \overline{r}F(P)dm = F\sum_1^n \overrightarrow{OB_i}. \tag{4}$$

Cum din (1) deducem

$$\sum_1^n \overrightarrow{OB_i} = \frac{1}{1+\lambda}\left(\sum_1^n \overrightarrow{OA_i} + \lambda \sum_1^n \overrightarrow{OA_{i+1}}\right) = \frac{1}{1+\lambda}\left(\sum_1^n \overrightarrow{OA_i} + \lambda \sum_1^n \overrightarrow{OA_i}\right) =$$

$$= \sum_1^n \overrightarrow{OA_i} ,$$

unde am ţinut seama că $A_{n+1} \equiv A_1$, rezultă că centrul forţelor paralele considerate are vectorul de poziţie

$$\bar{r}_G = \frac{1}{n} \sum_1^n \overrightarrow{OA_i} , \tag{5}$$

care nu depinde de raportul λ .

259. Un semicerc de rază R, limitat de diametrul AB ,este împărţit în n părţi egale prin punctele A_j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Fiecare dintre aceste puncte atrage punctul B proporţional cu distanţa, factorul de proporţionalitate fiind k . Să se afle rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului B .

Rezolvare. Luăm reperul x_1Ox_2 cu originea în mijlocul diametrului AB , axa Ox_1 coliniară cu vectorul $\overrightarrow{OA}$, iar axa Ox_2 perpendiculară pe AB şi orientată în partea semicercului.

Forţa care acţionează asupra punctului B are expresia

$$\bar{\mathcal{R}} = k \sum_1^{n-1} \overrightarrow{BA_j} . \tag{1}$$

Avînd în vedere că

$$\overrightarrow{BA_j} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_j}$$

şi

$$\overrightarrow{OA_j} = R\left(\bar{e}_1 \cos\frac{j\pi}{n} + \bar{e}_2 \sin\frac{j\pi}{n}\right) ,$$

formula (1) devine

$$\bar{\mathcal{R}} = kR\left[\left(n-1 + \sum_1^{n-1} \cos\frac{j\pi}{n}\right)\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \sum_1^{n-1} \sin\frac{j\pi}{n}\right] . \tag{2}$$

Pe componente, avem

$$\mathcal{R}_1 = kR\left(n-1 + \sum_1^{n-1} \cos\frac{j\pi}{n}\right) , \quad \mathcal{R}_2 = kR \sum_1^{n-1} \sin\frac{j\pi}{n} . \tag{3}$$

Pentru calcularea sumelor din (3) este mai simplu să considerăm forţa complexă

$$(4)\quad \mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2 = kR\left[n-1+\sum_1^{n-1}\left(\cos\frac{j\pi}{n}+i\sin\frac{j\pi}{n}\right)\right],\quad i=\sqrt{-1}\,.$$

Deoarece

$$\cos\frac{j\pi}{n}+i\sin\frac{j\pi}{n}=e^{ij\frac{\pi}{n}},$$

deducem

$$(4')\qquad \mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2 = kR\left(n-1+\sum_1^{n-1} e^{ij\frac{\pi}{n}}\right).$$

Progresia geometrică din (4') are suma

$$\sum_1^{n-1} e^{ij\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{n}}\,\frac{1-e^{i\frac{n-1}{n}\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = i\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\,,$$

prin urmare

$$(5)\qquad \mathcal{R}_1 = kR(n-1)\,,\quad \mathcal{R}_2 = kR\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\,.$$

260. In fiecare din vîrfurile unui tetraedru acţionează cîte o forţă normală pe faţa opusă şi avînd mărimea proporţională cu aria acesteia. In ipoteza că cele patru forţe sînt orientate la fel (spre interior sau spre exterior), să se arate că ele formează un sistem echivalent cu zero.

Rezolvare. Notăm cu A_i, $i=\overline{1,4}$, vîrfurile tetraedrului şi cu $\bar{F}_i$ forţele corespunzătoare. Expresiile forţelor $\bar{F}_i$ sînt de forma

$$\bar{F}_1 = k(\overrightarrow{A_2A_3}\times\overrightarrow{A_2A_4})\,,\quad \bar{F}_2 = k(\overrightarrow{A_3A_1}\times\overrightarrow{A_3A_4})\,,$$

$$\bar{F}_3 = k(\overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2})\,,\quad \bar{F}_4 = k(\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_2})\,,$$

unde k este un factor constant.

Observînd că

$$\bar{F}_1 = k\left[(\overrightarrow{A_1A_3}-\overrightarrow{A_1A_2})\times(\overrightarrow{A_1A_4}-\overrightarrow{A_1A_2})\right] =$$

$$= k(\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}-\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_4})\,,$$

$$\bar{F}_2 = -k(\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_4})\,,\quad \bar{F}_3 = k(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_4})\,,$$

găsim

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = 0 .$$

Deoarece rezultanta celor patru forţe este nulă, momentul rezultant al lor este invariant faţă de schimbarea polului. Astfel, putem calcula momentul rezultant în raport cu un punct convenabil ales. Dacă luăm ca pol punctul A_1, deducem

$$\overline{\mathcal{M}} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \bar{F}_2 + \overrightarrow{A_1A_3} \times \bar{F}_3 + \overrightarrow{A_1A_4} \times \bar{F}_4 = k\left[-\overrightarrow{A_1A_2} \times (\overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_4}) + \right.$$

$$\left. + \overrightarrow{A_1A_3} \times (\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_4}) + \overrightarrow{A_1A_4} \times (\overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_2})\right] = 0 .$$

Momentul rezultant în raport cu punctul A_1 fiind nul, el va fi nul în raport cu orice punct din spaţiu. Deci sistemul celor patru forţe este echivalent cu zero (cazul A de reducere).

261. Se consideră un reper ortonormat $Ox_1x_2x_3$ şi punctele A_i pe axele Ox_i, $i = \overline{1,3}$. Fie O', A_1' vîrfurile opuse punctelor O, A_i în paralelipipedul cu muchiile OA_i şi A_4 piciorul perpendicularei coborîte din A_3 pe A_1A_2 (v.fig.24). Să se afle elementele reducerii în origine a sistemelor de forţe :

1° $\bar{F}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\bar{F}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, $\bar{F}_3 = \overrightarrow{A_3A_4}$, primele două forţe fiind aplicate în O, iar a treia în A_3.

2° $\bar{F}_1 = k_1\overrightarrow{O'A_1'}$, $\bar{F}_2 = k_2\overrightarrow{A_1A_3'}$, $\bar{F}_3 = k_3\overrightarrow{OA_3}$, aplicate respectiv în punctele O', A_1, O.

Rezolvare. Notăm $a_i = \overline{OA_i}$, $i = \overline{1,3}$. Astfel avem

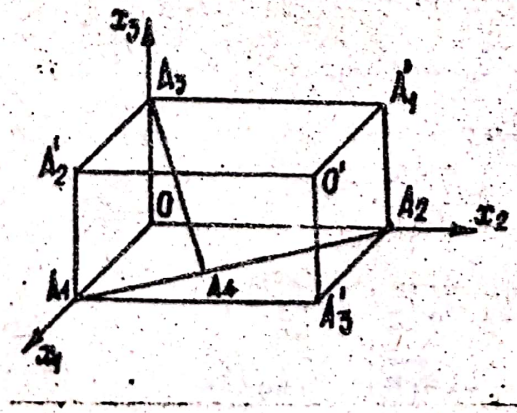

Fig.24

$$\overrightarrow{OA_1} = a_1\bar{e}_1, \overrightarrow{OA_2} = a_2\bar{e}_2, \overrightarrow{OA_3} = a_3\bar{e}_3 ,$$

$$\overrightarrow{OO'} = a_i\bar{e}_i, \overrightarrow{O'A_1'} = -a_1\bar{e}_1, \overrightarrow{A_1A_3'} = a_2\bar{e}_2,$$

$$\overrightarrow{A_3A_4} = \frac{a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}(a_2\bar{e}_1 + a_1\bar{e}_2) - a_3\bar{e}_3 .$$

1° Rezultanta celor trei forţe are expresia

$$\bar{\mathcal{R}} = a_1\left(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\right)\bar{e}_1 + a_2\left(1 + \frac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2}\right)\bar{e}_2 - a_3\bar{e}_3 ,$$

iar momentul rezultant în raport cu punctul O este

$$\bar{\mathcal{M}}_o = \overrightarrow{OA_3} \times \overrightarrow{A_3A_4} = \frac{a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2^2}(-a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2) .$$

Deducem că invariantul

$$\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{M}}_o = \frac{a_1a_2a_3(a_2^2 - a_1^2)}{a_1^2 + a_2^2} .$$

Dacă $a_1 \neq a_2$ sistemul este echivalent cu o forţă egală cu rezultanta $\bar{\mathcal{R}}$, aplicată în punctul O şi un cuplu al cărui moment este egal cu $\bar{\mathcal{M}}_o$. Ecuaţia vectorială a axei centrale este

$$\bar{r} = -\frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{(a_1^2+a_2^2)(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+5a_1^2a_2^2}\left(\frac{\bar{e}_1}{a_1} + \frac{\bar{e}_2}{a_2} - 3\frac{\bar{e}_3}{a_3}\right) + \lambda\bar{\mathcal{R}} ,$$

unde λ este un parametru.

Dacă $a_1 = a_2$ sistemul de forţe este echivalent cu o forţă egală cu

$$\bar{\mathcal{R}} = \frac{3}{2}a_1(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) - a_3\bar{e}_3 ,$$

al cărui suport (linie de acţiune sau axă centrală a sistemului de forţe) este

$$\bar{r} = \frac{a_1a_3}{9a_1^2+2a_3^2}\left[a_3(\bar{e}_1+\bar{e}_2) - 3a_1\bar{e}_3\right] + \lambda\left[3a_1(\bar{e}_1+\bar{e}_2) - 2a_3\bar{e}_3\right] .$$

2° Rezultanta sistemului de forţe are expresia

$$\bar{\mathcal{R}} = -k_1a_1\bar{e}_1 + k_2a_2\bar{e}_2 + k_3a_3\bar{e}_3 ,$$

iar momentul rezultant în raport cu punctul O este

$$\bar{\mathcal{M}}_o = k_1(\overrightarrow{OO'} \times \overrightarrow{O'A_1'}) + k_2(\overrightarrow{OA_1} \times \overrightarrow{A_1A_3'}) = a_1\left[-a_3k_1\bar{e}_2 + a_2(k_1+k_2)\bar{e}_3\right]$$

de unde

$$\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{M}}_o = a_1a_2a_3(-k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1) .$$

Prin urmare, pentru $k_1k_2 \neq (k_1+k_2)k_3$ sistemul de forţe este echivalent cu o forţă egală cu $\bar{\mathcal{R}}$, aplicată în punctul O şi un cuplu al cărui moment este egal cu $\bar{\mathcal{M}}_o$. Ecuaţia axei centrale este

$$\bar{r} = a_1 \frac{\left[k_2(k_1+k_2)a_2^2+k_1k_3a_3^2\right]\bar{e}_1+a_1a_2k_1(k_1+k_2)\bar{e}_2+a_1a_3k_1^2\bar{e}_3}{a_1^2k_1^2+a_2^2k_2^2+a_3^2k_3^2} + \lambda\bar{\mathcal{R}} .$$

Pentru $k_1k_2 = (k_1+k_2)k_3$ sistemul este echivalent cu o forţă egală cu

$$\bar{\mathcal{R}} = -k_1a_1\bar{e}_1 + k_2a_2\bar{e}_2 + \frac{k_1k_2a_3}{k_1+k_2}\bar{e}_3 ,$$

aplicată într-un punct al axei centrale

$$\bar{r}=a_1 \frac{k_2\left[(k_1+k_2)^2a_2^2+k_1^2a_3^2\right]\bar{e}_1+a_1a_2k_1(k_1k_2)^2\bar{e}_2+a_1a_3k_1^2(k_1+k_2)\bar{e}_3}{(a_1^2k_1^2+a_2^2k_2^2)(k_1+k_2)^2+k_1^2k_2^2a_3^2} + \lambda\bar{\mathcal{R}} .$$

Observaţie. In cazul cînd mărimile celor trei forţe sînt egale, punînd

$$F = a_1k_1 = a_2k_2 = a_3k_3 ,$$

deducem

$$\bar{\mathcal{R}}=F(-\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3),\ \bar{\mathcal{M}}_o=F\left[-a_3\bar{e}_2+(a_1+a_2)\bar{e}_3\right],\ \bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{M}}_o=F^2(a_1+a_2-a_3),$$

$$\bar{r} = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\bar{e}_1 + \frac{a_1+a_2}{3}\bar{e}_2 + \frac{a_3}{3}\bar{e}_3 + \lambda\bar{\mathcal{R}} .$$

Dacă $a_3 = a_1 + a_2$ sistemul se reduce la o forţă unică egală cu $\bar{\mathcal{R}}$ a cărei linie de acţiune este

$$\bar{r} = \frac{a_1+a_2}{3}\left[2\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3\right] + \lambda(-\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3) .$$

262. Fiind dat un patrulater strîmb $A_1A_2A_3A_4$ să se găsească patru forţe aplicate în punctele A_i şi dirijate de-a lungul laturilor $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, $A_5 \equiv A_1$, astfel încît să fie echivalente cu un cuplu sau cu o forţă unică.

Rezolvare. Forţele căutate sînt de forma

$$\bar{F}_i = k_i \cdot \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \quad k_i > 0, \quad i = \overline{1,4}. \tag{1}$$

Rezultanta forţelor (1) are expresia

$$\bar{\mathcal{R}} = k_1\overrightarrow{A_1A_2} + k_2\overrightarrow{A_2A_3} + k_3\overrightarrow{A_3A_4} + k_4\overrightarrow{A_4A_1}. \tag{2}$$

Luăm pe A_1 ca punct de reducere. Momentul rezultant al sistemului de forţe în raport cu punctul A_1 este

$$\bar{\mathcal{M}} = k_2(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_2A_3}) + k_3(\overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_3A_4}). \tag{3}$$

Deoarece

$$\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{A_1A_2}, \quad \overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{A_1A_3},$$

avem

$$\bar{\mathcal{R}} = (k_1-k_2)\overrightarrow{A_1A_2} + (k_2-k_3)\overrightarrow{A_1A_3} + (k_3-k_4)\overrightarrow{A_1A_4}, \tag{2'}$$

$$\bar{\mathcal{M}} = \overrightarrow{A_1A_3} \times (-k_2\overrightarrow{A_1A_2} + k_3\overrightarrow{A_1A_4}). \tag{3'}$$

i) Pentru ca sistemul de forţe (1) să fie echivalent cu un cuplu este necesar şi suficient ca rezultanta să fie nulă şi momentul rezultant faţă de un punct arbitrar din spaţiu să fie diferit de zero (cazul B).

Avînd în vedere că vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ sînt presupuşi necoplanari, din (2') deducem că rezultanta $\bar{\mathcal{R}}$ este nulă dacă şi numai dacă avem

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4. \tag{4}$$

In acest caz formula (3') se reduce la

$$\bar{\mathcal{M}} = k_1(\overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_2A_4}) \neq 0. \tag{5}$$

Prin urmare, pentru ca sistemul de forţe (1) să se reducă la un cuplu de forţe este necesar şi suficient ca mărimile

forţelor să fie proporţionale cu lungimile laturilor corespunzătoare ale patrulaterului dat.

ii) Sistemul de forţe (1) se reduce la o forţă unică (cazul C) atunci şi numai atunci cînd

$$\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{M}} = 0 , \quad \mathcal{R} \neq 0 . \tag{6}$$

Ţinînd seama de relaţiile (2') şi (3'), condiţia (6) devine

$$(k_1k_3-k_2k_4)(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4}) = 0 . \tag{7}$$

Cum $(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4}) \neq 0$, din (7) obţinem

$$k_1k_3 - k_2k_4 = 0 . \tag{8}$$

Deci, în cazul cînd are loc relaţia (8), sistemul de forţe (1) este echivalent cu o singură forţă aplicată într-un punct al axei centrale a sistemului.

263. Să se afle forţa de atracţie a unei plăci eliptice omogene asupra unui punct Q interior, presupunînd că mărimea atracţiei unei particule este egală cu raportul dintre masa sa şi distanţa la punctul Q .

Rezolvare. Dacă luăm axele de simetrie ale elipsei ca axe de coordonate, elipsa care mărgineşte masa atractivă are ecuaţia

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0 . \tag{1}$$

Fie D domeniul delimitat de elipsa (1) şi $P(x_1,x_2)$ un punct generic al său. Notăm cu y_1,y_2 coordonatele punctului Q şi cu ρ densitatea plăcii.

Forţa specifică de masă are expresia

$$\bar{F}(P) = \rho \frac{\overrightarrow{QP}}{\overline{QP}^2} , \quad \rho = \text{const.}, \ P \in D . \tag{2}$$

Astfel, forţa cu care placa atrage punctul Q este

$$\bar{\mathcal{R}} = \rho \iint_D \frac{(x_1-y_1)\bar{e}_1+(x_2-y_2)\bar{e}_2}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \, dx_1dx_2 . \tag{3}$$

Pentru explicitarea relaţiei (3) luăm un sistem de coordonate polare cu polul în Q. Avem

$$x_1 - y_1 = r\cos\theta\ ,\quad x_2 - y_2 = r\sin\theta\ ,$$

deci ecuaţia (1) devine

$$(4)\quad r^2 f(\cos\theta\ ,\sin\theta\ ) + 2rf(\sqrt{y_1}\cos\theta\ ,\sqrt{y_2}\sin\theta\ ) + f(y_1,y_2) - 1 = 0\ .$$

Din (4) obţinem

$$(5)\qquad r = f_1(\theta) + f_2(\theta)\ ,$$

în care

$$(6)\quad \begin{cases} f_1(\theta) = -\dfrac{f(\sqrt{y_1}\cos\theta\ ,\sqrt{y_2}\sin\theta\ )}{f(\cos\theta\ ,\sin\theta\ )}\ , \\ f_2(\theta) = \dfrac{\sqrt{f^2(\sqrt{y_1}\cos\theta\ ,\sqrt{y_2}\sin\theta\ ) + (1 - f(y_1,y_2))f(\cos\theta,\sin\theta\ )}}{f(\cos\theta\ ,\sin\theta\ )}\ . \end{cases}$$

Deducem

$$\bar{\mathcal{R}} = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\theta)} (\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta\ )\,dr\,d\theta\ ,$$

sau

$$(7)\qquad \bar{\mathcal{R}} = \rho\int_0^{2\pi}\left[f_1(\theta) + f_2(\theta)\right](\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta\ )\,d\theta\ .$$

Observînd că

$$\int_\pi^{2\pi} f_1(\theta)(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta\ )\,d\theta = \int_0^{\pi} f_1(\theta)(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta\ )\,d\theta\ ,$$

$$\int_\pi^{2\pi} f_2(\theta)(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta\ )\,d\theta = -\int_0^{\pi} f_2(\theta)(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta\ )\,d\theta\ ,$$

putem scrie

$$(8)\qquad \bar{\mathcal{R}} = -2\rho\int_0^{\pi} \frac{y_1\cos\theta + ky_2\sin\theta}{\cos^2\theta + k\sin^2\theta}(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta\ )\,d\theta\ ,$$

unde $k = \dfrac{a_1^2}{a_2^2}$.

Deoarece

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{y_1\cos\theta + ky_2\sin\theta}{\cos^2\theta + k\sin^2\theta}(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-y_1\cos\theta + ky_2\sin\theta}{\cos^2\theta + k\sin^2\theta}(-\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta)d\theta ,$$

rezultă

$$(8') \qquad \bar{\mathcal{R}} = -4\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y_1\bar{e}_1\cos^2\theta + ky_2\bar{e}_2\sin^2\theta}{\cos^2\theta + k\sin^2\theta}d\theta .$$

Cu ajutorul substituţiei $tg\theta = u$, găsim

$$(8'') \qquad \bar{\mathcal{R}} = -4\rho\int_0^{\infty} \frac{y_1\bar{e}_1 + ky_2u^2\bar{e}_2}{(1+ku^2)(1+u^2)}du .$$

Cum

$$\frac{1}{(1+ku^2)(1+u^2)} = \frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{k}{1+ku^2}\right) ,$$

obţinem

$$\bar{\mathcal{R}} = -\frac{2M}{a_1+a_2}\left(\frac{y_1}{a_1}\bar{e}_1 + \frac{y_2}{a_2}\bar{e}_2\right) ,$$

unde $M = \pi a_1a_2\rho$ este masa plăcii eliptice.

264. Particulele unui strat sferic omogen atrag un punct cu o forţă a cărei mărime depinde numai de distanţă. Să se determine această funcţie de distanţă astfel încît atracţia oricărui strat sferic asupra unui punct Q exterior arbitrar să fie aceeaşi cu a centrului sferei, dotat cu o masă egală cu masa totală a corpului.

Rezolvare. Alegem un reper ortonormat $Ox_1x_2x_3$ cu originea în centrul sferei de rază a şi axa Ox_1 să treacă prin punctul exterior Q care este atras de suprafaţa sferică. Notăm cu x abscisa punctului Q.

Forţa specifică de masă este de forma

$$(1) \qquad \bar{F}(P) = \frac{\overrightarrow{QP}}{r}f(r) , \quad r = \overline{QP} = \sqrt{x^2+a^2-2xx_1} ,$$

unde $P(x_1,x_2,x_3)$ este un punct de pe suprafaţa sferei.

Forţa cu care stratul sferic atrage punctul Q este

$$(2)\quad \bar{\mathcal{R}} = \iint_D \frac{(x_1-x)\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3}{r} f(r)d\sigma \ ,$$

unde D reprezintă suprafaţa sferei, iar $d\sigma$ elementul de arie.

Deoarece

$$\iint_D \frac{x_2}{r} f(r)d\sigma = \iint_D \frac{x_3}{r} f(r)d\sigma = 0 \ ,$$

rezultă că atracţia $\bar{\mathcal{R}}$ este coliniară cu vectorul $\overrightarrow{QO}$.

Astfel, mărimea atracţiei este

$$(3)\quad \mathcal{R} = \iint_D \frac{x_1 - x}{r} f(r)d\sigma \ .$$

Dacă luăm pe x_1 şi x_2 ca parametri pe suprafaţa sferei, avem

$$d\sigma = \frac{a dx_1 dx_2}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}} \ ,$$

deci

$$\mathcal{R} = 4a\int_{-a}^{a} \frac{x_1 - x}{r} f(r)dx_1 \int_0^{\sqrt{a^2-x_1^2}} \frac{dx_2}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}} \ ,$$

Rezultă

$$(4)\quad \mathcal{R} = 2\pi a\int_{-a}^{a} \frac{x_1 - x}{r} f(r)dx_1 \ .$$

Exprimînd pe x_1 în funcţie de r găsim

$$(4')\quad \mathcal{R} = \frac{\pi a}{x^2} \int_{x-a}^{x+a} (r^2+x^2-a^2)f(r)dr \ .$$

Notînd cu M masa totală a stratului sferic, atracţia centrului sferei are mărimea $4\pi a^2 f(x)$. Din egalitatea celor două forţe deducem

$$(5)\quad 4ax^2 f(x) = \int_{x-a}^{x+a} (r^2+x^2-a^2)f(r)dr \ .$$

Relaţia (5) este o identitate, verificată pentru orice

valori ale lui x şi a care îndeplinesc condiţia $0<a<x$.

Prin derivarea identităţii (5) în raport cu x şi apoi în raport cu a , obţinem , respectiv, ecuaţiile

$$(6)\begin{cases} 8axf(x)+4ax^2f'(x)=2x(x+a)f(x+a)-2x(x-a)f(x-a)+2x\int_{x-a}^{x+a} f(r)dr, \\ 4x^2f(x)=2x(x+a)f(x+a)+2x(x-a)f(x-a)-2a\int_{x-a}^{x+a} f(r)dr . \end{cases}$$

Eliminarea integralei din ecuaţiile (6) conduce la

$$(7)\quad 2(2a^2+x^2)f(x)+2a^2xf'(x)=(x+a)^2f(x+a)+(x-a)^2f(x-a).$$

Dacă punem

$$x^2f(x) = \varphi(x) ,$$

avem

$$2xf(x) + x^2f'(x) = \varphi'(x)$$

şi ecuaţia (7) devine

$$(8)\qquad 2\varphi(x) + 2\frac{a^2}{x}\varphi'(x) = \varphi(x+a) + \varphi(x-a) .$$

Prin derivare succesivă de trei ori în raport cu a, ecuaţia (8) dă

$$(9)\qquad \varphi'''(x+a) = \varphi'''(x-a) .$$

Cum x şi a sînt variabile independente, x+a şi x-a pot lua valori arbitrare, de unde rezultă că $\varphi'''(x)$ este o constantă şi

$$(10)\qquad \varphi(x) = A_1x^3 + A_2x^2+A_3x + A_4 .$$

Din (8) şi (10) deducem identitatea

$$(11)\quad \begin{aligned} &2(A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4)+2a^2(3A_1x+2A_2+\frac{A_3}{x}) = \\ &= 2A_1(x^3+3xa^2)+2A_2(x^2+a^2)+2A_3x+2A_4 . \end{aligned}$$

Relaţia (11) este verificată oricare ar fi x şi a dacă

$$A_2 = A_3 = 0 ,$$

ceea ce ne conduce la legea atracţiei

$$(12)\qquad f(x) = Ax + \frac{B}{x^2} ,$$

unde am pus $A_1 = A$, $A_4 = B$.

Prin urmare, mărimea atracţiei suprafeţei sferei asupra punctului exterior Q este

$$\mathcal{R} = 4\pi a^2\left(Ax + \frac{B}{x^2}\right).$$

Observaţie. Mărimea atracţiei suprafeţei sferei, după legea (12), asupra unui punct interior este

$$\mathcal{R} = \frac{\pi a}{x^2}\int_{a-x}^{a+x}(r^2+x^2-a^2)\left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)dr = 4\pi Aa^2x,$$

(v. problema 256).

Capitolul XIII

DINAMICA SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE

Considerăm un sistem format din n puncte materiale P_i, de mase m_i şi de vectori de poziţie $\bar{r}_i$, $i=\overline{1,n}$. Ecuaţiile de mişcare ale punctelor sistemului, faţă de un reper inerţial, sînt

$$(13.1)\quad m_i\bar{a}_i = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^{n}\bar{F}_{ij}\ ,\quad \bar{F}_{ij}= 0 \text{ pentru } j=i\ (i=\overline{1,n}),$$

unde $\bar{a}_i = \ddot{\bar{r}}_i$ reprezintă acceleraţia punctului P_i, iar $\bar{F}_i$ şi $\bar{F}_{ij}$ au semnificaţiile din capitolul XII. Forţele interne $\bar{F}_{ij}$ satisfac relaţiile (12.2). In cazul cînd sistemul material este supus la legături, atunci introducem şi forţele de legătură care pot fi externe sau interne şi le includem, respectiv, în $\bar{F}_i$ şi $\bar{F}_{ij}$ (v. cap.V). Un sistem mecanic se numeşte izolat dacă asupra punctelor sale nu acţionează nici o forţă externă.

Mişcarea sistemului de puncte se determină din ecuaţiile diferenţiale (13.1), la care se adaugă condiţiile iniţiale

$$(13.2)\qquad \bar{r}_i(t_o) = \bar{r}_{io}\ ,\ \dot{\bar{r}}_i(t_o) = \bar{v}_{io}\ .$$

Impulsul total al sistemului material este

$$(13.3)\qquad \bar{I} = \sum_{1}^{n} m_i\bar{v}_i = M\bar{v}^*\ ,$$

unde $\bar{v}^*$ este viteza centrului de masă al sistemului.

Momentul cinetic total, în raport cu polul O, al sistemului material are expresia

$$\bar{K} = \sum_{1}^{n} m_i(\bar{r}_i \times \bar{v}_i) \quad . \tag{13.4}$$

Teorema I-a a lui König: Momentul cinetic al sistemului în raport cu un reper inerţial este egal cu momentul cinetic faţă de un reper cu originea în centrul de masă şi cu axele de direcţii fixe plus momentul cinetic al centrului de masă, în raport cu reperul inerţial , care se presupune că este dotat cu o masă egală cu masa totală a sistemului,adică

$$\bar{K} = \bar{K}^* + M(\bar{r}^* \times \bar{v}^*) \quad . \tag{13.5}$$

Energia cinetică totală a sistemului de puncte este dată de

$$E = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} m_i \bar{v}_i^2 \quad . \tag{13.6}$$

Teorema a II-a a lui König: Energia cinetică a sistemului faţă de un reper inerţial este egală cu energia cinetică faţă de un reper cu originea în centrul maselor şi cu axele de direcţii fixe plus energia cinetică faţă de reperul inerţial a centrului maselor, presupus dotat cu o masă egală cu masa sistemului, adică

$$E = E^* + \frac{1}{2} M\bar{v}^{*2} \quad . \tag{13.7}$$

Teoremele generale ale dinamicii sistemelor sînt: teorema impulsului, a momentului cinetic şi a energiei cinetice.

Teorema impulsului. Derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem material este egală cu rezultanta forţelor exterioare care acţionează asupra sistemului, adică

$$\dot{\bar{I}} = \bar{\mathcal{R}} \quad , \quad \bar{\mathcal{R}} = \sum_{1}^{n} \bar{F}_i \quad . \tag{13.8}$$

Această teoremă este echivalentă cu

Teorema mişcării centrului de masă. Centrul maselor unui sistem mecanic se mişcă la fel ca un punct liber, dotat cu o masă egală cu masa sistemului, sub acţiunea unei forţe egală cu rezultanta forţelor externe ale sistemului, adică

(13.9) $$M\ddot{\bar{r}}^* = \bar{\mathcal{Q}} .$$

Teorema momentului cinetic. Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total faţă de un punct fix O este egală cu momentul rezultant al forţelor externe faţă de acelaşi punct, adică

(13.10) $$\dot{\bar{K}} = \bar{\mathcal{M}} \quad , \quad \bar{\mathcal{M}} = \sum_{1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i .$$

Teorema ariilor. Dacă momentul rezultant al forţelor externe este nul faţă de axa Ox_3, atunci suma produselor maselor punctelor sistemului prin mărimile vitezelor areolare ale proiecţiilor lor pe planul x_1Ox_2 este o constantă, adică

(13.11) $$\sum_{1}^{n} m_i(x_{1i}\dot{x}_{2i} - x_{2i}\dot{x}_{1i}) = C ,$$

unde x_{ji} , $j = \overline{1,3}$ sînt coordonatele punctului P_i, iar C este constanta ariilor.

Teorema momentului cinetic este valabilă şi în mişcarea faţă de centrul maselor, adică în mişcarea sistemului faţă de un reper neinerţial cu originea în centrul maselor P^* şi avînd axele de direcţii fixe, cu alte cuvinte, avem

(13.12) $$\dot{\bar{K}}^* = \bar{\mathcal{M}}^* .$$

Teorema energiţiei cinetice. Derivata în raport cu timpul a energiei cinetice totale a unui sistem mecanic este egală cu suma puterilor forţelor externe şi interne

(13.13) $$\dot{E} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int} ,$$

unde

$$\mathcal{P}_{ext} = \sum_{1}^{n} \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i , \quad \mathcal{P}_{int} = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{F}_{ij}\bar{v}_i .$$

Teorema energiei cinetice se poate enunţa şi sub forma :

Diferenţiala energiei cinetice totale a unui sistem mecanic este egală cu suma lucrurilor mecanice elementare ale forţelor externe şi interne

(13.14) $$dE = d\mathcal{L}_{ext} + d\mathcal{L}_{int} ,$$

unde

$$d\mathcal{L}_{ext} = \mathcal{P}_{ext}dt , \quad d\mathcal{L}_{int} = \mathcal{P}_{int}dt .$$

In cazul cînd există şi forţe de legătură, lucrul mecanic elementar al forţelor de legătură este nul.

Pentru un sistem mecanic rigid lucrul mecanic elementar al forţelor interne este nul, iar lucrul mecanic elementar al forţelor externe este

$$d\mathcal{L}_{ext} = (\bar{v}_A \bar{\mathcal{R}} + \bar{\omega}\bar{\mathcal{M}}_A)dt ,$$

unde punctul A este presupus solidar cu sistemul, iar $\bar{\mathcal{R}}$ şi $\bar{\mathcal{M}}_A$ sînt, respectiv, rezultanta şi momentul rezultant al forţelor externe.

Integrala primă a energiei. Dacă suma lucrurilor mecanice elementare ale forţelor externe şi interne, pentru un sistem mecanic, este diferenţială exactă,

$$d\mathcal{L}_{ext} + d\mathcal{L}_{int} = dW ,$$

unde W este o funcţie uniformă de coordonatele punctelor sistemului, atunci are loc integrala primă a energiei

(13.15) $$E = W + const.$$

Un sistem mecanic se numeşte conservativ dacă există o funcţie uniformă de coordonatele punctelor sistemului U, astfel încît

$$d\mathcal{L}_{int} = dU .$$

Funcţia $V = -U$, definită pînă la un termen constant, se numeşte energia potenţială a sistemului. Suma $E + V$ reprezintă energia totală a sistemului.

Teorema energiei. Pentru un sistem mecanic conservativ, avem

(13.16) $$d(E + V) = d\mathcal{L}_{ext} ,$$

deci, diferenţiala energiei mecanice a unui sistem conservativ este egală cu lucrul mecanic elementar al forţelor externe.

Teorema conservării energiei. Dacă lucrul mecanic elementar al forţelor externe este nul, atunci energia mecanică a sistemului material este constantă.

(13.17) $$E + V = h , \quad h = const.$$

Teorema energiei cinetice este valabilă şi în mişcarea faţă de centrul maselor, prin urmare, avem

(13.18) $$\dot{E}^* = \mathcal{P}^*_{ext} + \mathcal{P}^*_{int} .$$

Teorema impulsului (13.8), a momentului cinetic (13.10) şi a energiei cinetice (13.13), dau un sistem de şapte ecuaţii diferenţiale aplicabile oricărui sistem mecanic.

265. Se consideră un sistem izolat format din două puncte materiale P_1 şi P_2, de mase m_1 şi m_2. Ştiind că vitezele iniţiale ale celor două puncte au direcţii ortogonale, să se studieze mişcarea centrului maselor sistemului.

Rezolvare. In cazul de faţă asupra punctelor P_1 şi P_2 se exercită numai forţe interne, care nu influenţează mişcarea centrului de masă. Notăm cu $\bar{r}_{1o}, \bar{r}_{2o}$ vectorii de poziţie ai punctelor P_1, P_2 la momentul iniţial şi cu $\bar{v}_{1o}, \bar{v}_{2o}$ vitezele corespunzătiare. Avem

$$\bar{r}^*_o = \frac{m_1\bar{r}_{1o}+m_2\bar{r}_{2o}}{m_1 + m_2} , \quad \bar{v}^*_o = \frac{m_1\bar{v}_{1o}+m_2\bar{v}_{2o}}{m_1 + m_2} .$$

Deoarece vectorii $\bar{v}_{1o}$ şi $\bar{v}_{2o}$ sînt presupuşi ortogonali, rezultă

$$v^*_o = \frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{m_1^2v_{1o}^2 + m_2^2v_{2o}^2} .$$

Teorema mişcării centrului de masă (13.9) dă $\bar{r}^* = 0$, de unde

$$\bar{r}^* = \bar{v}_0^* t + \bar{r}_0^* ,$$

deci, centrul de masă al celor două puncte se mişcă rectiliniu şi uniform.

266. Două puncte materiale libere de mase m_1 şi m_2 se atrag între ele după legea lui Newton. La momentul iniţial punctele se află în repaus şi distanţa între ele este egală cu a. Să se afle mărimile vitezelor celor două puncte în momentul cînd distanţa dintre ele devine $\frac{a}{2}$.

Rezolvare. Fie P_1, P_2 cele două puncte materiale, $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ vectorii lor de poziţie faţă de un reper inerţial şi $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ vitezele corespunzătoare. Punctele P_1, P_2 formează un sistem mecanic izolat, deci, asupra lor nu acţionează forţe externe. Forţele interne care acţionează între cele două puncte au expresiile

$$(1) \qquad \bar{F}_{12} = k \frac{m_1 m_2}{P_1 P_2^3} \overrightarrow{P_1 P_2} , \quad \bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12} ,$$

unde k este constanta atracţiei universale.

Deoarece vitezele iniţiale ale punctelor P_1 şi P_2 sînt nule, teorema impulsului (13.8) conduce la

$$(2) \qquad m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = 0 ,$$

de unde

$$(3) \qquad m_1 v_1 = m_2 v_2 .$$

Pe de altă parte, avem

$$d\mathcal{L}_{int} = \bar{F}_{12} d\bar{r}_1 + \bar{F}_{21} d\bar{r}_2 = - \frac{k m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^3} (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) d(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = d\left(\frac{k m_1 m_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|} \right),$$

prin urmare, sistemul este conservativ şi are funcţia de forţe

$$U = \frac{km_1m_2}{|\bar{r}_2-\bar{r}_1|} .$$

Utilizînd condiţiile iniţiale date, teorema conservării energiei (13.17) dă

(4) $$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = 2km_1m_2\left(\frac{1}{|\bar{r}_2-\bar{r}_1|} - \frac{1}{a}\right) .$$

In momentul cînd distanţa dintre puncte se reduce la jumătate avem

(5) $$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = \frac{2km_1m_2}{a} .$$

Din formulele (3) şi (5) deducem

$$\frac{v_1}{m_2} = \frac{v_2}{m_1} = \sqrt{\frac{2k}{a(m_1+m_2)}} .$$

267. Două puncte de aceeaşi masă se mişcă, fără frecare, unul pe axa fixă Ox_1, altul pe axa ortogonală Ox_2 şi se atrag reciproc cu o forţă a cărei mărime este o funcţie $f(r)$, unde r este distanţa dintre ele.

1° Să se arate că, dacă cele două puncte pornesc din repaus, ele ajung în acelaşi timp în originea O, oricare ar fi poziţiile lor iniţiale.

2° Să se studieze mişcarea sistemului în cazul $f(r) = kr$, $k = const.$

3° Să se studieze mişcarea sistemului în cazul $f(r) = \frac{k}{r^2}$, $k = const.$

Rezolvare. Fie P_1 punctul care se mişcă pe axa Ox_1 şi P_2 punctul care se mişcă pe axa Ox_2. Masele celor două puncte le luăm egale cu unitatea. Notăm cu x_1 abscisa punctului P_1 şi cu x_2 ordonata punctului P_2 .

Forţele externe care sînt aplicate în punctele P_1, P_2 sînt forţele de legătură

(1) $$\bar{L}_1 = L_1\bar{e}_2 \ , \quad \bar{L}_2 = L_2\bar{e}_1 \ .$$

Asupra punctelor P_1 şi P_2 acţionează forţele interne

(2) $$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} = -f(r)\,\frac{x_1\bar{e}_1 - x_2\bar{e}_2}{r} \ , \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ .$$

Ecuaţiile de mişcare (13.1) se reduc la

(3) $$\ddot{x}_1\bar{e}_1 = L_1\bar{e}_2 - f(r)\frac{x_1\bar{e}_1 - x_2\bar{e}_2}{r} \ , \quad \ddot{x}_2\bar{e}_2 = L_2\bar{e}_1 + f(r)\frac{x_1\bar{e}_1 - x_2\bar{e}_2}{r} \ .$$

Sistemul (3) este echivalent cu

(4) $$\ddot{x}_1 = -f(r)\frac{x_1}{r} \ , \quad \ddot{x}_2 = -f(r)\frac{x_2}{r}$$

şi

(5) $$L_1 = -f(r)\frac{x_2}{r} \ , \quad L_2 = -f(r)\frac{x_1}{r} \ .$$

Centrul de masă al sistemului are vectorul de poziţie

$$\bar{r}^* = \frac{1}{2}(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2) \ , \quad r^* = \frac{r}{2} \ .$$

Ecuaţiile (4) ne arată că centrul de masă al sistemului se mişcă liber sub acţiunea unei forţe centrale conservativă cu polul în O (v. cap.VII).

Din sistemul de ecuaţii diferenţiale (4) deducem următoarele două integrale prime

(6) $$x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2 = C_1 \ , \quad C_1 = x_2^0\dot{x}_1^0 - x_1^0\dot{x}_2^0 \ ,$$

(7) $$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = -2\int_{r_0}^{r} f(u)du + (\dot{x}_1^0)^2 + (\dot{x}_2^0)^2 \ ,$$

unde r_0 este valoarea iniţială a lui r .

Dacă exprimăm pe x_1 şi x_2 cu ajutorul coordonatelor polare r^* şi θ ale centrului de masă prin formulele

$$x_1 = 2\,r^*\cos\theta \ , \quad x_2 = 2\,r^*\sin\theta \ ,$$

relaţiile (6) şi (7) devin respectiv

(6') $$r^{*2}\dot{\theta} = C \ , \quad C = -\frac{1}{4}C_1 \ ,$$

$$(7') \qquad \dot{r}^{*2} + r^{*2}\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{2}\int_{2r_0^*}^{2r^*} f(u)du + v_0^{*2} .$$

Din (6') şi (7') rezultă ecuaţia diferenţială a traiectoriei centrului de masă (v. ecuaţia (7.14))

$$(8) \qquad \left(\frac{1}{r^*}\right)'^2 + \frac{1}{r^{*2}} = -\frac{1}{2C^2}\int_{2r_0^*}^{2r^*} f(u)du + \frac{v_0^{*2}}{C^2} .$$

1° Deoarece $\dot{x}_1^0$ şi $\dot{x}_2^0$ sînt presupuşi nuli, avem $C_1 = 0$, oricare ar fi x_1^0 şi x_2^0, deci, ecuaţia (6) devine

$$(6'') \qquad x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2 = 0 ,$$

de unde

$$(9) \qquad x_2 = C_2x_1 , \quad C_2 = \frac{x_2^0}{x_1^0} ,$$

prin urmare, x_1 şi x_2 se anulează simultan, adică punctele P_1 şi P_2 ajung în acelaşi timp în O .

2° Acest caz se obţine din problema 178, pentru m=1, a=-2k, b=0, iar în locul lui r, în cazul de faţă avem r^*. Rezultă că centrul maselor se mişcă pe o conică cu centrul în O.

3° Acest caz se obţine din problema 176, pentru m=1, $a = -\frac{k}{4}$, b=0, sau din problema 180, pentru m=1, $f(\theta) = -\frac{k}{4}$. Centrul maselor se mişcă pe o conică cu focarul în O (v. şi problema 183).

268. Să se studieze mişcarea unui sistem format din trei puncte materiale libere, între care se exercită legea atracţiei universale (problema celor trei corpuri).

Rezolvare. Fie trei puncte P_i de mase m_i, de vectori de poziţie $\bar{r}_i$ şi de viteze $\bar{v}_i$, $i = \overline{1,3}$. Acţiunile mutuale ale acestor puncte sînt reprezentate prin

$$(1) \qquad \bar{F}_{ij} = -\frac{km_im_j}{r_{ij}^3}(\bar{r}_i - \bar{r}_j) ,$$

unde $r_{ij} = |\bar{r}_i - \bar{r}_j|$ este distanţa dintre punctele P_i şi P_j, iar k este constanta atracţiei universale.

Cum sistemul nu este solicitat de nici o forţă externă, mişcarea centrului său de masă este rectilinie şi uniformă, ceea ce dă

(2) $$m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + m_3\bar{r}_3 = \bar{C}_1 t + \bar{C}_2 ,$$

unde $\bar{C}_1$ şi $\bar{C}_2$ sînt vectori constanţi (v. formulele (13.3), (13.8) şi (13.9)).

De asemenea, teorema momentului cinetic (13.10) conduce la

(3) $$m_1(\bar{r}_1 \times \bar{v}_1) + m_2(\bar{r}_2 \times \bar{v}_2) + m_3(\bar{r}_3 \times \bar{v}_3) = \bar{C}_3 ,$$

în care $\bar{C}_3$ este un vector constant.

In sfîrşit, o ultimă integrală primă a ecuaţiilor mişcării se obţine din teorema conservării energiei (13.17). In adevăr, avem

$$d\mathcal{L}_{int} = (\bar{F}_{12}+\bar{F}_{13})d\bar{r}_1+(\bar{F}_{21}+\bar{F}_{23})d\bar{r}_2+(\bar{F}_{31}+\bar{F}_{32})d\bar{r}_3 =$$

$$= kd\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_3m_1}{r_{31}}\right) ,$$

prin urmare, potenţialul newtonian al sistemului este

$$U = k\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_3m_1}{r_{31}}\right) .$$

Astfel, integrala primă a energiei are forma

(4) $$m_1v_1^2+m_2v_2^2+m_3v_3^2=2k\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_3m_1}{r_{31}}\right) + h ,$$

unde h este o constantă.

Relaţiile (2),(3) şi (4) reprezintă şapte integrale prime scalare pentru problema celor trei corpuri. Deoarece sistemul are nouă grade de libertate, pentru determinarea mişcării lui avem nevoie de nouă integrale prime. Celebra problemă a celor trei corpuri (Soarele, Pămîntul, Luna), fundamentală în mecanic

cerească, a făcut obiectul cercetărilor a numeroşi matematicieni şi mecanicieni din secolele XVIII - XX . Astfel, Bruns a demonstrat că cele şapte integrale clasice obţinute mai sus sînt singurele care sînt algebrice în raport cu coordonatele punctelor şi cu derivatele lor de ordinul întîi; Poincaré a stabilit că problema celor trei corpuri nu comportă, în afara celor şapte integrale prime, nici o altă integrală analitică şi uniformă; Painlevé a arătat că nu poate exista altă integrală care să fie algebrică măcar în raport cu derivatele de ordinul întîi.

Observaţie. In cazul problemei plane a celor trei corpuri avem şase grade de libertate şi patru integrale prime.

269. Să se studieze mişcarea a n puncte materiale care se atrag mutual cu forţe ale căror mărimi sînt proporţionale cu masele punctelor şi cu distanţele dintre ele.

Rezolvare. Deoarece nu există forţe externe, centrul de masă al sistemului se mişcă rectiliniu şi uniform (v. şi problema 265).

Studiem mişcarea sistemului de puncte faţă de un reper cu originea în centrul de masă şi cu axele de direcţii fixe, care este un reper inerţial.

Notăm cu m_i masele punctelor şi cu $\bar{r}_i$ vectorii lor de poziţie. Acţiunile mutuale ale acestor puncte se pot scrie sub forma

$$\bar{F}_{ij} = -k^2 \frac{m_i m_j}{M} (\bar{r}_i - \bar{r}_j) , \tag{1}$$

unde M este masa totală a sistemului, iar k o constantă.

Deoarece am luat originea reperului în centrul de masă, avem

$$m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \ldots + m_n\bar{r}_n = 0 ,$$

astfel încît obţinem

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{ij} = -k^2 m_i \bar{r}_i \ .$$

Prin urmare, ecuaţiile de mişcare ale celor n puncte, faţă de reperul ales, sînt

(2) $$\ddot{\bar{r}}_i = -k^2 \bar{r}_i \ , \quad i = \overline{1,n}.$$

Ecuaţiile (2) arată că, în raport cu centrul maselor, fiecare punct al sistemului se mişcă pe o elipsă cu centrul coincizînd cu centrul de masă. Toate elipsele sînt descrise în acelaşi timp $T = \frac{2\pi}{k}$, astfel că sistemul revine periodic în aceeaşi configuraţie.

270. Un punct material P_1 se mişcă fără frecare pe axa Ox_1, iar un al doilea punct material P_2 este liber în spaţiu. Să se studieze mişcarea celor două puncte, presupunînd că se atrag proporţional cu distanţa lor.

Rezolvare. Notăm cu m_1, m_2 masele celor două puncte şi cu $\bar{r}_1 = y_1\bar{e}_1$, $\bar{r}_2 = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$ vectorii lor de poziţie. Forţele externe se reduc la forţa de legătură $\bar{L}$, aplicată în punctul P_1 şi normală axei Ox_1, deci, este de forma

$$\bar{L} = L_2\bar{e}_2 + L_3\bar{e}_3 \ .$$

Forţele interne au expresiile

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} = -k^2 m_2(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \ , \ k = \text{const.}$$

Pe componente, ecuaţiile de mişcare ale celor două puncte se scriu

(1) $$m_1\ddot{y}_1 = -k^2 m_2(y_1 - x_1), \ 0 = L_2 + k^2 m_2 x_2, \ 0 = L_3 + k^2 m_2 x_3 \ ,$$

respectiv

(2) $$\ddot{x}_1 = -k^2(x_1 - y_1), \ \ddot{x}_2 = -k^2 x_2, \ \ddot{x}_3 = -k^2 x_3 \ .$$

Din ecuaţiile $(1)_1$ şi $(2)_1$ deducem integrala primă

$$(3) \qquad m_1 y_1 + m_2 x_1 = \frac{m_1}{k^2}(C_1 t + C_2) ,$$

unde C_1 şi C_2 sînt constante. Egalitatea (3) exprimă faptul că proiecţia centrului de masă pe axa Ox_1 se mişcă uniform.

Din (1) - (3) rezultă că y_1 şi x_1 satisfac ecuaţia diferenţială

$$(4) \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = C_1 t + C_2 , \qquad \omega^2 = k^2 \frac{m_1+m_2}{m_1} .$$

Prin urmare, obţinem

$$(5) \qquad \begin{cases} y_1 = C_3 \cos(\omega t - C_4) + \frac{1}{\omega^2}(C_1 t + C_2) , \\ x_1 = -\frac{m_1}{m_2} C_3 \cos(\omega t - C_4) + \frac{1}{\omega^2}(C_1 t + C_2) , \\ x_2 = C_5 \cos(kt - C_6) , \quad x_3 = C_7 \cos(kt - C_8) , \end{cases}$$

unde C_i, $i=\overline{1,8}$, sînt constante, care se determină din datele iniţiale.

Relaţiile $(5)_1$ şi $(5)_2$ ne arată că, faţă de proiecţia centrului de masă pe axa Ox_1, punctul P_1 şi proiecţia lui P_2 pe Ox_1 execută mişcări oscilatorii. De asemenea, proiecţia punctului P_2 pe planul x_2Ox_3 descrie o elipsă cu centrul în origine.

271. Să se studieze mişcarea a două puncte materiale grele de aceeaşi masă m, legate între ele printr-o bară rigidă, fără masă şi de lungime 2ℓ şi obligate a se mişca, fără frecare, unul pe axa verticală fixă Ox_1, iar celălalt pe axa orizontală fixă Ox_2.

Rezolvare. Presupunem că axa Ox_1 este verticală descendentă. Notăm cu P_1 punctul care se mişcă pe axa Ox_1 şi cu P_2 punctul care se mişcă pe axa Ox_2.

Deoarece distanţa dintre punctele P_1 şi P_2 rămîne constantă

în timpul mişcării, acest sistem are un singur grad de libertate . Prin urmare, avem un sistem mecanic cu legături complete[1] scleronome. Centrul de masă P^* al sistemului coincide cu mijlocul segmentului $\overline{P_1P_2}$. Luăm ca parametru unghiul θ dintre raza vectoare a punctului P^* şi axa Ox_1. Vectorii de poziţie ai punctelor P_1, P_2, P^* au, respectiv, expresiile

(1) $\bar{r}_1 = 2\ell\,\bar{e}_1\cos\theta$, $\bar{r}_2 = 2\ell\,\bar{e}_2\sin\theta$, $\bar{r}^* = \ell(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta)$.

Forţele externe aplicate sistemului sînt greutăţile $m\bar{g}$ ale celor două puncte şi forţele de legătură $\bar{L}_1$ şi $\bar{L}_2$, care sînt normale axelor Ox_1 şi Ox_2, respectiv.

Forţele interne aplicate punctelor P_1, P_2 sînt tensiunile barei, care au expresiile

(2) $$\bar{T}_1 = T\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{2\ell} \quad , \quad \bar{T}_2 = T\frac{\overrightarrow{P_2P_1}}{2\ell} \quad , \quad T > 0 \ .$$

Această problemă conţine patru funcţii necunoscute θ, L_1, L_2 şi T de variabila independentă t. Necunoscutele θ , L_1 şi L_2 pot fi determinate atît din ecuaţiile de mişcare ale celor două puncte, cît şi din teoremele generale. Tensiunea barei T nu intră în teoremele genarale, deoarece ea reprezintă forţele interne ale unui sistem rigid.

Ecuaţiile de mişcare ale celor două puncte sînt

(3) $$\begin{cases} m\ddot{\bar{r}}_1 = m\bar{g} + L_1\bar{e}_2 + \dfrac{T}{2\ell}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \ , \\ m\ddot{\bar{r}}_2 = m\bar{g} + L_2\bar{e}_1 + \dfrac{T}{2\ell}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \ . \end{cases}$$

Dacă proiectăm ecuaţiile (3) pe axele Ox_1, Ox_2 şi ţinem seama de (1), găsim

---

1) Un sistem mecanic se numeşte cu legături complete dacă are un singur grad de libertate.

(4) $-2\ell m(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = mg - T\cos\theta$, $L_1 + T\sin\theta = 0$

şi

(5) $2\ell m(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = -T\sin\theta$, $L_2 + mg + T\cos\theta = 0$.

Prin eliminarea lui T din ecuaţiile $(4)_1$ şi $(5)_1$ obţinem

(6) $$\ddot{\theta} + \frac{g}{2\ell}\sin\theta = 0 .$$

Ecuaţia (6), care determină mişcarea sistemului, este identică cu ecuaţia de mişcare a unui pendul simplu de lungime 2ℓ , suspendat în punctul O, numit pendul simplu sincron sistemului material considerat.

Ecuaţia (6) are integrala primă

(7) $$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{\ell}(\cos\theta + h) , \quad h = \text{const.}$$

Inlocuind pe $\ddot{\theta}$ din (6) şi pe $\dot{\theta}^2$ din (7) în ecuaţiile $(4)_1$ sau $(5)_1$ deducem

(8) $$T = mg(3\cos\theta + 2h).$$

Observăm că mărimea tensiunii barei este egală cu mărimea forţei de legătură a pendulului matematic sincron.

Dacă eliminăm pe T din relaţiile $(4)_2$, $(5)_2$ şi (8), rezultă

(9) $$\begin{cases} L_1 = -mg(3\cos\theta + 2h)\sin\theta , \\ L_2 = -mg(3\cos\theta + 2h)\cos\theta - mg . \end{cases}$$

<u>Observaţie.</u> Ecuaţia (7) poate fi dedusă şi din integrala primă a energiei (13.15). In adevăr, energia cinetică a sistemului mecanic este

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\bar{r}}_1^2 + \dot{\bar{r}}_2^2) = 2m\ell^2\dot{\theta}^2 ,$$

iar

$$d\mathcal{L}_{ext} + d\mathcal{L}_{int} = (m\bar{g} + \bar{L}_1 + \bar{T}_1)d\bar{r}_1 + (m\bar{g} + \bar{L}_2 + \bar{T}_2)d\bar{r}_2 =$$

$$= m\bar{g}d\bar{r}_1 = d(m\bar{g}\bar{r}_1) = d(2\ell mg\cos\theta),$$

deci

$$W = 2\ell mg\cos\theta .$$

De asemenea, ecuaţiile (6) şi (9) pot fi obţinute din

teorema impulsului şi teorema momentului cinetic în raport cu punctul O. Teorema impulsului este reprezentată prin relaţia care se găseşte adunînd membru cu membru ecuaţiile (3). Momentul cinetic total faţă de origine este nul,

$$\bar{K} = m(\bar{r}_1 \times \bar{v}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{v}_2) = 0 ,$$

deci, momentul rezultant al forţelor externe faţă de origine este egal cu zero. Astfel, avem

$$\bar{r}_1 \times (m\bar{g} + \bar{L}_1) + \bar{r}_2 \times (m\bar{g} + \bar{L}_2) = 0 ,$$

de unde

$$L_1 \cos\theta - L_2 \sin\theta = mg \sin\theta .$$

272. Să se studieze mişcarea unui sistem format din două puncte materiale grele de aceeaşi masă m, legate între ele printr-un fir rigid şi fără masă şi mobile într-un plan vertical. Unul dintre puncte P_1 se mişca fără frecare pe axa orizontală Ox_2, iar al doilea punct P_2 este atras de această axă proporţional cu distanţa.

Rezolvare. Luăm axa Ox_1 verticală descendentă, notăm cu 2ℓ lungimea firului şi cu $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ vectorii de poziţie ai celor două puncte.

Avem un sistem mecanic rigid cu două grade de libertate. Luăm ca parametri ordonata punctului P_1, pe care o notăm cu y şi unghiul θ dintre vectorul $\overrightarrow{P_1P_2}$ şi axa Ox_2. Astfel

(1) $\bar{r}_1 = y\bar{e}_2$, $\bar{r}_2 = 2\ell \bar{e}_1 \sin\theta + (y + 2\ell\cos\theta)\bar{e}_2$.

Forţele externe care acţionează asupra sistemului sînt greutăţile $m\bar{g}$ ale celor două puncte, forţa de legătură $\bar{L}$ normală axei Ox_2 în P_1 şi atracţia axei Ox_2 asupra punctului P_2, care este de forma

(2) $\bar{F} = -2m\ell k^2 \bar{e}_1 \sin\theta$, $k = \text{const.}$

Forţele interne sînt tensiunile firului $\bar{T}_1$ şi $\bar{T}_2$ ale căror expresii sînt de forma (2) de la problema 271.

Prin urmare, avem patru funcţii necunoscute y, θ, L şi T de variabila independentă t.

Ecuaţiile de mişcare ale celor două puncte sînt

$$(3)\qquad \begin{cases} m\ddot{\bar{r}}_1 = m\bar{g} + L\bar{e}_1 + \dfrac{T}{2\ell}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \\ m\ddot{\bar{r}}_2 = m\bar{g} - 2m\ell k^2\bar{e}_1\sin\theta + \dfrac{T}{2\ell}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2). \end{cases}$$

Pe componente, ecuaţiile (3) dau

$$(4)\qquad \begin{cases} L + T\sin\theta + mg = 0, \quad m\ddot{y} = T\cos\theta, \\ 2m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = mg - 2m\ell k^2\sin\theta - T\sin\theta, \\ m\ddot{y} - 2m\ell(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = -T\cos\theta. \end{cases}$$

Dacă eliminăm pe T din ecuaţiile $(4)_2$-$(4)_4$ obţinem sistemul

$$(5)\qquad \begin{cases} \ddot{y} - \ell(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = 0, \\ \ddot{y}\sin\theta + 2\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\cos\theta = \\ \qquad = g\cos\theta - 2\ell k^2\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Ecuaţiile (5) determină mişcarea sistemului considerat (condiţiile iniţiale le luăm de formă generală). Prima ecuaţie din (5) dă

$$(6)\qquad y + \ell\cos\theta = C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const.},$$

deci, proiecţia centrului de masă pe axa Ox_2 se mişcă uniform.

Prin eliminarea lui $\ddot{y}$ din (5) găsim

$$(7)\qquad (1 + \cos^2\theta)\ddot{\theta} - (\dot{\theta}^2 - 2k^2)\sin\theta\cos\theta = \frac{g}{\ell}\cos\theta.$$

Această ecuaţie se poate de altfel integra odată şi dă

$$(8)\qquad (1 + \cos^2\theta)\dot{\theta}^2 - 2k^2\cos^2\theta = \frac{2g}{\ell}\sin\theta + h, \quad h = \text{const.}$$

Astfel funcţiile y şi θ se află din ecuaţiile (6) şi (8).

Mărimea forţei de legătură şi mărimea tensiunii firului se determină în funcţie de θ din ecuaţiile (4) şi (8).

Observaţie. Pentru determinarea necunoscutelor y, θ şi L putem, de asemenea, utiliza teorema impulsului şi teorema momentului cinetic.

Impulsul celor două puncte materiale este

$$\bar{I} = 2m\left[\ell\dot{\theta}\bar{e}_1\cos\theta + (\dot{y} - \ell\dot{\theta}\sin\theta)\bar{e}_2\right],$$

iar rezultanta forţelor exterioare are expresia

$$\bar{\mathcal{R}} = (L + 2mg - 2m\ell\sin\theta)\bar{e}_1,$$

prin urmare, obţinem ecuaţia

$$(9)\qquad 2m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\bar{e}_1 + 2m\left[\ddot{y} - \ell(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\right]\bar{e}_2 = (L + 2mg - 2m\ell\sin\theta)\bar{e}_1 .$$

Momentul cinetic total are expresia

$$\bar{K} = 2m\ell(\dot{y}\sin\theta - y\dot{\theta}\cos\theta - 2\ell\dot{\theta})\bar{e}_3,$$

iar momentul rezultant al forţelor exterioare este

$$\bar{\mathcal{M}} = \left[2m\ell k^2(y + 2\ell\cos\theta)\sin\theta - 2mg(y + \ell\cos\theta) - yL\right]\bar{e}_3,$$

deci avem

$$(10)\qquad 2m\ell(\ddot{y}\sin\theta - 2\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta - y\ddot{\theta}\cos\theta + y\dot{\theta}^2\sin\theta - 2\ell\ddot{\theta}) = 2m\ell k^2(y + 2\ell\cos\theta)\sin\theta - 2mg(y + \ell\cos\theta) - yL .$$

Din ecuaţiile (9) şi (10) putem afla cele trei necunoscute y, θ şi L.

273. Să se studieze mişcarea a două puncte care se află pe un cerc orizontal şi se resping cu o forţă a cărei mărime este invers proporţională cu puterea a treia a distanţei dintre ele.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate. Alegem un reper ortonormat x_1Ox_2 cu originea în centrul cercului. Fie P_1, P_2 cele două puncte, m_1, m_2 masele lor şi $2\theta_1, 2\theta_2$ unghiurile razelor vectoare ale lor cu axa Ox_1. Notăm cu α, ω_1, ω_2 valorile iniţiale ale lui $\theta_2 - \theta_1$, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ şi cu R

raza cercului. Razele vectoare ale punctelor P_1, P_2 sînt , respectiv,

(1) $\bar{r}_1 = R(\bar{e}_1 \cos 2\theta_1 + \bar{e}_2 \sin 2\theta_1)$, $\bar{r}_2 = R(\bar{e}_1 \cos 2\theta_2 + \bar{e}_2 \sin 2\theta_2)$.

Singurele forţe externe care acţionează asupra sistemului sînt forţele de legătură ale celor două puncte, care au expresiile

(2) $$\bar{L}_1 = -L_1 \frac{\bar{r}_1}{R} , \quad \bar{L}_2 = -L_2 \frac{\bar{r}_2}{R} .$$

Forţele interne pot fi scrise sub forma

(3) $$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} = \frac{16k^2 m_1 m_2 R^4}{M|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^4}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) ,$$

unde k este o constantă, iar M este masa totală a sistemului.

Problema aceasta conţine patru funcţii necunoscute şi anume θ_1, θ_2, L_1 şi L_2 .

Ecuaţiile de mişcare ale celor două puncte sînt

(4) $$\begin{cases} m_1 \ddot{\bar{r}}_1 = \dfrac{16\, k^2 R^4 m_1 m_2}{M|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^4}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) - L_1 \dfrac{\bar{r}_1}{R} , \\ m_2 \ddot{\bar{r}}_2 = \dfrac{16\, k^2 R^4 m_1 m_2}{M|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^4}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) - L_2 \dfrac{\bar{r}_2}{R} . \end{cases}$$

Deoarece $\bar{r}_1^2 = \bar{r}_2^2 = R^2$, avem $\bar{r}_1 \dot{\bar{r}}_1 = \bar{r}_2 \dot{\bar{r}}_2 = 0$, astfel încît înmulţind scalar ecuaţiile (4) respectiv cu $\dot{\bar{r}}_1$ şi $\dot{\bar{r}}_2$, obţinem

(5) $$\dot{\bar{r}}_1 \ddot{\bar{r}}_1 = -\frac{16\, k^2 R^4 m_2}{M|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^4} \bar{r}_2 \dot{\bar{r}}_1 , \quad \dot{\bar{r}}_2 \ddot{\bar{r}}_2 = -\frac{16\, k^2 R^4 m_1}{M|r_2 - r_1|^4} \bar{r}_1 \dot{\bar{r}}_2 .$$

Cum

$|\bar{r}_2 - \bar{r}_1| = 2R|\sin(\theta_2 - \theta_1)|$, $\dot{\bar{r}}_1 \ddot{\bar{r}}_1 = 4R^2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1$, $\dot{\bar{r}}_2 \ddot{\bar{r}}_2 = 4R^2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2$,

$\bar{r}_2 \dot{\bar{r}}_1 = 2R^2 \dot{\theta}_1 \sin 2(\theta_2 - \theta_1)$, $\bar{r}_1 \dot{\bar{r}}_2 = 2R^2 \dot{\theta}_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2)$,

ecuaţiile (5) iau forma

(6) $$\ddot{\theta}_1 = -\frac{k^2 m_2}{M}\frac{\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin^3(\theta_2-\theta_1)}, \quad \ddot{\theta}_2 = \frac{k^2 m_1}{M}\frac{\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin^3(\theta_2-\theta_1)}.$$

Din sistemul (6) deducem

$$m_1\ddot{\theta}_1 + m_2\ddot{\theta}_2 = 0,$$

prin urmare, dacă alegem convenabil axa Ox_1, avem

(7) $$m_1\theta_1 + m_2\theta_2 = (m_1\omega_1 + m_2\omega_2)t.$$

De asemenea, punînd $u = \theta_2 - \theta_1$, din (6) rezultă

(8) $$\ddot{u} = k^2\frac{\cos u}{\sin^3 u}.$$

Integrînd o dată ecuaţia (8) găsim

(9) $$\dot{u}^2 = -\frac{k^2}{\sin^2 u} + \frac{k^2}{\sin^2\alpha} + (\omega_2-\omega_1)^2.$$

Făcînd notaţia

$$\frac{k^2}{\sin^2\alpha} + (\omega_2-\omega_1)^2 = \frac{k^2}{\sin^2\beta},$$

ecuaţia (9) se scrie

(9') $$\dot{u}^2 = k^2\frac{\cos^2\beta - \cos^2 u}{\sin^2\beta\sin^2 u},$$

sau

$$\frac{k\,dt}{\sin\beta} = \pm\frac{\sin u\,du}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2 u}},$$

de unde

(10) $$\cos(\theta_2-\theta_1) = \cos\beta\cos\left(\frac{kt}{\sin\beta}+\gamma\right), \quad \gamma = \arccos\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Relaţia (10) ne arată că unghiul $\theta_2-\theta_1$ oscilează între $\pi-\beta$ (cînd $\cos\left(\frac{kt}{\sin\beta}+\gamma\right) = -1$) şi β (cînd $\cos\left(\frac{kt}{\sin\beta}+\gamma\right)=1$).

Ecuaţiile (7) şi (10) determină complet legea mişcării. Expresiile lui θ_1 şi θ_2 în funcţie de u sînt

(11) $$\begin{cases}\theta_1 = \frac{1}{M}\left[(m_1\omega_1+m_2\omega_2)t - m_2 u\right],\\ \theta_2 = \frac{1}{M}\left[(m_1\omega_1+m_2\omega_2)t + m_1 u\right].\end{cases}$$

Pentru determinarea forţelor de legătură înmulţim scalar ecuaţiile (4) cu $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$, respectiv. Obţinem

$$(12)\quad RL_1+m_1\bar{r}_1\ddot{\bar{r}}_1=RL_2+m_2\bar{r}_2\ddot{\bar{r}}_2=\frac{16k^2R^4m_1m_2}{M|\bar{r}_2-\bar{r}_1|^4}(R^2-\bar{r}_1\bar{r}_2)\ .$$

Avînd în vedere că

$$\bar{r}_1\ddot{\bar{r}}_1=-\dot{\bar{r}}_1^2=-4R^2\dot{\theta}_1^2,\quad \bar{r}_2\ddot{\bar{r}}_2=-\dot{\bar{r}}_2^2=-4R^2\dot{\theta}_2^2,\quad \bar{r}_1\bar{r}_2=R^2\cos 2(\theta_2-\theta_1),$$

din (12) rezultă

$$(13)\quad \begin{cases} L_1 = 2m_1R\left(2\dot{\theta}_1^2+\dfrac{k^2m_2}{M\sin^2(\theta_2-\theta_1)}\right), \\ L_2 = 2m_2R\left(2\dot{\theta}_2^2+\dfrac{k^2m_1}{M\sin^2(\theta_2-\theta_1)}\right). \end{cases}$$

Expresiile lui L_1 şi L_2 în funcţie de t se obţin prin intermediul relaţiilor (11),(9') şi (10).

Observaţie. Această problemă poate fi rezolvată şi cu ajutorul teoremelor generale. Teorema impulsului, a momentului cinetic şi a energiei cinetice dau, pe rînd

$$m_1\ddot{\bar{r}}_1+m_2\ddot{\bar{r}}_2=-L_1\frac{\bar{r}_1}{R}-L_2\frac{\bar{r}_2}{R},$$

$$m_1\ddot{\theta}_1+m_2\ddot{\theta}_2=0,$$

$$m_1\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1+m_2\dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2=\frac{k^2m_1m_2\cos(\theta_2-\theta_1)}{M\sin^3(\theta_2-\theta_1)}(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1).$$

274. Să se studieze mişcarea a două puncte materiale care se atrag proporţional cu distanţa dintre ele şi sînt obligate să rămînă pe două cercuri concentrice situate într-un plan orizontal.

Rezolvare. Folosim o metodă analogă aceleia de la problema precedentă. Luăm un reper ortonormat x_1Ox_2 cu originea în centrul comun al cercurilor. Sistemul mecanic format din cele două

puncte materiale are două grade de libertate. Notăm cu m_1, m_2 masele punctelor, cu $2\theta_1, 2\theta_2$ unghiurile dintre razele vectoare ale lor şi axa Ox_1, cu $\alpha, \omega_1, \omega_2$ valorile iniţiale ale lui $\theta_2 - \theta_1$, $\dot\theta_1$, $\dot\theta_2$ şi cu R_1, R_2 razele celor două cercuri. Vectorii de poziţie ai punctelor sînt

$$(1)\quad \bar r_1 = R_1(\bar e_1 \cos 2\theta_1 + \bar e_2 \sin 2\theta_1),\ \bar r_2 = R_2(\bar e_1 \cos 2\theta_2 + \bar e_2 \sin 2\theta_2).$$

Forţele externe care acţionează asupra sistemului sînt forţele de legătură ale punctelor, care pot fi scrise sub forma

$$(2)\quad \bar L_1 = -L_1 \frac{\bar r_1}{R_1},\ \bar L_2 = -L_2 \frac{\bar r_2}{R_2},$$

iar forţele interne au expresiile

$$(3)\quad \bar F_{12} = -\bar F_{21} = k^2(\bar r_2 - \bar r_1),\quad k = \text{const.}$$

Trebuie să determinăm pe $\theta_1, \theta_2, L_1, L_2$ în funcţie de t.

Ecuaţiile de mişcare ale celor două puncte sînt

$$(4)\quad \begin{cases} m_1 \ddot{\bar r}_1 = k^2(\bar r_2 - \bar r_1) - L_1 \dfrac{\bar r_1}{R_1}, \\ m_2 \ddot{\bar r}_2 = k^2(\bar r_1 - \bar r_2) - L_2 \dfrac{\bar r_2}{R_2}. \end{cases}$$

Deoarece $\bar r_1^2 = R_1^2$, $\bar r_2^2 = R_2^2$, avem $\bar r_1 \dot{\bar r}_1 = \bar r_2 \dot{\bar r}_2 = 0$, astfel încît înmulţind scalar ecuaţiile (4) respectiv cu $\dot{\bar r}_1$ şi $\dot{\bar r}_2$, obţinem

$$(5)\quad m_1 \dot{\bar r}_1 \ddot{\bar r}_1 = k^2 \bar r_2 \dot{\bar r}_1,\ m_2 \dot{\bar r}_2 \ddot{\bar r}_2 = k^2 \bar r_1 \dot{\bar r}_2.$$

Avînd în vedere că

$$\dot{\bar r}_1 \ddot{\bar r}_1 = 4R_1^2 \dot\theta_1 \ddot\theta_1,\ \bar r_2 \dot{\bar r}_1 = 2R_1R_2 \dot\theta_1 \sin 2(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\dot{\bar r}_2 \ddot{\bar r}_2 = 4R_2^2 \dot\theta_2 \ddot\theta_2,\ \bar r_1 \dot{\bar r}_2 = 2R_1R_2 \dot\theta_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2),$$

ecuaţiile (5) devin

$$(6)\quad m_1R_1 \ddot\theta_1 = k^2R_2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1),\ m_2R_2 \ddot\theta_2 = -k^2R_1 \sin 2(\theta_2 - \theta_1).$$

Din sistemul (6) avem

$$m_1R_1^2 \ddot\theta_1 + m_2R_2^2 \ddot\theta_2 = 0,$$

prin urmare, dacă alegem convenabil axa Ox_1, avem

$$(7)\quad m_1R_1^2\,\theta_1+m_2R_2^2\,\theta_2=\omega t\ ,\qquad \omega=m_1R_1^2\,\omega_1+m_2R_2^2\,\omega_2\ .$$

Dacă punem $\theta_2-\theta_1=u$, rezultă

$$(8)\quad \theta_1=\frac{\omega t-m_2R_2^2\,u}{m_1R_1^2+m_2R_2^2}\ ,\qquad \theta_2=\frac{\omega t+m_1R_1^2\,u}{m_1R_1^2+m_2R_2^2}\ .$$

Din (6) şi (8) deducem că u satisface ecuaţia

$$(9)\qquad \ddot{u}=-\frac{k^2(m_1R_1^2+m_2R_2^2)}{m_1m_2\,R_1R_2}\sin 2u\ .$$

Relaţia (9) are forma ecuaţiei unui pendul matematic. Rezultă că are loc integrala primă

$$\dot{u}^2=k^2\,\frac{m_1R_1^2+m_2R_2^2}{m_1m_2\,R_1R_2}(\cos 2u-\cos 2\alpha)+(\omega_2-\omega_1)^2\ .$$

Pentru determinarea forţelor de legătură înmulţim scalar ecuaţiile (4) cu $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ respectiv. Deoarece

$$\bar{r}_1\ddot{\bar{r}}_1=-\dot{\bar{r}}_1^2=-4R_1^2\,\dot{\theta}_1^2,\ \bar{r}_1\bar{r}_2=R_1R_2\cos 2(\theta_2-\theta_1),\ \bar{r}_2\ddot{\bar{r}}_2=-\dot{\bar{r}}_2^2=-4R_2^2\,\dot{\theta}_2^2\ ,$$

se găseşte

$$L_1=4m_1R_1\,\dot{\theta}_1^2+k^2\left[R_2\cos 2(\theta_2-\theta_1)-R_1\right]\ ,$$

$$L_2=4m_2R_2\,\dot{\theta}_2^2+k^2\left[R_1\cos 2(\theta_2-\theta_1)-R_1\right]\ .$$

Observaţie. Pentru rezolvarea acestei probleme putem, de asemenea, utiliza teoremele generale (v.şi observaţia de la problema precedentă).

275. Să se studieze mişcarea a două puncte materiale grele de aceeaşi masă m, legate între ele printr-un fir elastic şi fără masă, a cărui tensiune are mărimea $T=mk^2(r-\ell)$, unde k este o constantă, 2ℓ este lungimea naturală a firului şi $2r$ este lungimea sa alungită ($r>\ell$).

Rezolvare. Notăm cu P_1,P_2 cele două puncte şi cu $\bar{r}_1,\bar{r}_2$ vectorii lor de poziţie. Acest sistem mecanic are şase grade

de libertate. Forţele externe care acţionează asupra sistemului sînt greutăţile $m\bar{g}$ ale celor două puncte. Forţele interne sînt tensiunile firului $\bar{T}_1$ şi $\bar{T}_2$ ale căror expresii sînt

$$(1) \qquad \bar{T}_1 = -\bar{T}_2 = T\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{2r} \ , \ 2r = |\overrightarrow{P_1P_2}| .$$

Ecuaţiile de mişcare ale celor două puncte sînt

$$(2) \qquad \begin{cases} \ddot{\bar{r}}_1 = \bar{g} + k^2\frac{r-\ell}{2r}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \ , \\ \ddot{\bar{r}}_2 = \bar{g} + k^2\frac{r-\ell}{2r}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \ . \end{cases}$$

Adunînd membru cu membru ecuaţiile (2) obţinem

$$\ddot{\bar{r}}_1 + \ddot{\bar{r}}_2 = 2\bar{g} \ ,$$

de unde

$$(3) \qquad \bar{r}_1 + \bar{r}_2 = 2\bar{r}^* = \bar{g}t^2 + \bar{v}_o^* t + \bar{r}_o^* \ ,$$

în care $\bar{r}^*$ este vectorul de poziţie al centrului de masă la momentul t, iar $\bar{r}_o^*$ şi $\bar{v}_o^*$ sînt vectorul de poziţie şi viteza centrului de masă la momentul iniţial. Relaţia (3) ne arată că centrul de masă al sistemului se mişcă, ca un punct material greu, pe o parabolă situată într-un plan vertical.

Dacă notăm

$$(4) \qquad \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = 2\bar{r} \ ,$$

avem

$$(5) \qquad \bar{r}_1 = \bar{r}^* - \bar{r} \ , \ \bar{r}_2 = \bar{r}^* + \bar{r} \ .$$

Din (2) şi (5) rezultă că vectorul $\bar{r}$ verifică ecuaţia

$$(6) \qquad \ddot{\bar{r}} = k^2\frac{\ell - r}{r}\bar{r} \ .$$

Egalitatea (6) conduce la

$$(7) \qquad \bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \bar{C} \ ,$$

unde $\bar{C}$ este un vector constant, care se determină din datele iniţiale. Egalitatea (7) exprimă faptul că vectorul $\bar{r}$, adică $\overrightarrow{P_1P_2}$, rămîne în tot timpul mişcării într-un plan (π) de direcţie fixă şi care trece prin centrul de masă al sistemului.

Luăm atunci un reper ortonormat $Ox_1x_2x_3$ cu originea în centrul de masă al sistemului şi axele Ox_1, Ox_2 situate în planul (π) şi de direcţii fixe. Notînd cu θ unghiul dintre $\overrightarrow{OP_1}$ şi axa Ox_1, coordonatele polare ale punctului P_1, în planul x_1Ox_2, sînt r şi θ, iar cele ale punctului P_2 sînt r şi $\theta+\pi$.

Ecuaţia (7) dă integrala ariilor în planul x_1Ox_2

$$r^2\dot{\theta} = C \,. \tag{8}$$

In baza lui (8) egalitatea (6) conduce la

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = k^2(\ell - r) \,,$$

de unde deducem

$$\dot{r}^2 = -\frac{C^2}{r^2} - k^2(r-\ell)^2 + h \,, \quad h = \text{const.} \tag{9}$$

Relaţiile (8) şi (9) determină pe r şi θ în funcţie de t. Ecuaţia diferenţială a traiectoriilor relative ale punctelor P_1 şi P_2 în planul x_1Ox_2 se obţine prin eliminarea lui dt din ecuaţiile (8) şi (9). Astfel, avem

$$d\theta = \frac{\pm C\,dr}{r\sqrt{hr^2 - k^2r^2(r-\ell)^2 - C^2}} \,, \tag{10}$$

unde trebuie să luăm semnul + sau - , după cum r este o funcţie crescătoare sau descrescătoare de θ.

Polinomul de gradul patru în r de sub radicalul din (10) este pozitiv pentru valoarea iniţială a lui r, $r_0 > \ell$, deoarece atunci el are valoarea $r_0^2\dot{r}_0^2$ (presupunem $\dot{r}_0 \neq 0$). Pentru $r = 0$ şi $r = \infty$ polinomul în chestiune ia valori negative, deci are două variaţii de semn. Deducem că acest polinom are două rădăcini pozitive şi numai două, fie ele a şi b şi r variază între aceste rădăcini. Unghiul θ variază tot timpul în acelaşi sens, fiindcă $\dot{\theta}$ păstrează un semn constant.

In consideraţiile precedente este esenţial faptul că $r>\ell$. Dacă la un moment dat r devine egal şi apoi mai mic decît ℓ, firul nu va rămîne întins, iar forţa $\bar{T}$ dispare ca şi cînd k ar deveni nul. Cele două puncte materiale grele devin independente şi începînd din acest moment, se mişcă rectiliniu şi uniform faţă de centrul de masă, pînă în momentul în care distanţa dintre ele devine mai mare decît 2ℓ, cînd firul se întinde din nou şi forţa $\bar{T}$ reapare. In acest caz traiectoriile relative se compun alternativ din arce ale curbei (10), cînd $r>\ell$ şi segmente de drepte care se racordează acestor arce, cînd $r<\ell$. Pentru ca acest caz să aibă loc, este necesar şi suficient ca ℓ să fie cuprins între rădăcinile a şi b ale polinomului, între care variază r.

Observaţie. Ecuaţia (3) poate fi dedusă din teorema mişcării centrului de masă (13.9), relaţia (7) rezultă imediat din teorema momentului cinetic în mişcarea faţă de centrul de masă (13.12), iar formula (9) este o consecinţă a relaţiei (7) şi a teoremei energiei cinetice în mişcarea faţă de centrul de masă (13.18).

276. Două puncte materiale P_1 şi P_2 de aceeaşi masă m, mobile în planul orizontal fix x_1Ox_2, sînt legate între ele printr-un fir inextensibil şi fără masă de lungime 2ℓ. Să se studieze mişcarea sistemului în următoarele cazuri:

1° Asupra punctelor P_1, P_2 acţionează forţele $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ orientate perpendicular spre axa Ox_2 şi avînd mărimile proporţionale cu distanţele punctelor respective la această axă.

2° Punctul P_1 este atras către punctul fix $O_1(a,0)$, iar punctul P_2 este atras către punctul $O_2(-a,0)$ cu forţe ale căror mărimi sînt proporţionale cu distanţele respective.

Rezolvare. Sistemul mecanic format din punctele P_1 şi P_2 are trei grade de libertate, deoarece distanţa dintre puncte rămîne constantă în timpul mişcării (firul fiind presupus inextensibil). Luăm ca parametri coordonatele x_1^*, x_2^* ale centrului de masă P^* al sistemului şi unghiul θ dintre vectorul $\overrightarrow{P^*P_1}$ şi axa Ox_1. Vectorii de poziţie ai celor două puncte au expresiile

$$(1) \qquad \bar{r}_1 = \bar{r}^* + \ell(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta), \quad \bar{r}_2 = \bar{r}^* - \ell(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta).$$

Forţele interne care acţionează asupra punctelor P_1 şi P_2 sînt tensiunile firului $\bar{T}_1$ şi $\bar{T}_2$, ale căror expresii sînt de forma (2) de la problema 271.

Dacă firul este flexibil, atunci este posibil ca la un moment dat distanţa dintre cele două puncte să devină mai mică decît 2ℓ. In acest moment legătura nu mai funcţionează, tensiunile $\bar{T}_1$ şi $\bar{T}_2$ se suprimă şi cele două puncte devin independente, pînă cînd distanţa dintre ele este din nou egală cu 2ℓ şi tensiunile $\bar{T}_1, \bar{T}_2$ reapar. Pe timpul cît nu funcţionează legătura sistemul are patru grade de libertate.

1° Forţele externe le scriem sub forma

$$(2) \qquad \bar{F}_1 = -k^2m(x_1^* + \ell\cos\theta)\bar{e}_1, \quad \bar{F}_2 = -k^2m(x_1^* - \ell\cos\theta)\bar{e}_1, \; k=\text{const}.$$

Teorema mişcării centrului de masă (13.9) conduce la

$$\ddot{\bar{r}}^* = -k^2x_1^*\bar{e}_1,$$

sau, pe componente,

$$(3) \qquad \ddot{x}_1^* = -k^2x_1^*, \quad \ddot{x}_2^* = 0.$$

Integrala generală a sistemului (3) este de forma

$$(4) \qquad x_1^* = C_1\cos(kt - C_2), \quad x_2^* = C_3t + C_4,$$

unde C_i, $i=\overline{1,4}$, sînt constante care se determină din datele iniţiale.

Unghiul θ se poate afla din teorema energiei cinetice faţă de centrul maselor (13.18). Vectorii de poziţie ai punctelor P_1, P_2 în raport cu centrul de masă sînt, respectiv, $\ell(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta)$, $-\ell(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta)$, iar vitezele corespunzătoare $\ell\dot{\theta}(-\bar{e}_1\sin\theta + \bar{e}_2\cos\theta)$ şi $-\ell\dot{\theta}(-\bar{e}_1\sin\theta + \bar{e}_2\cos\theta)$. Prin urmare, energia cinetică a sistemului faţă de centrul maselor are expresia

$$(+) \qquad E^* = m\ell^2\dot{\theta}^2 .$$

Acest sistem mecanic fiind rigid, puterea forţelor interne este nulă. Puterea forţelor externe este

$$\mathcal{P}^*_{ext} = (\bar{F}_1 - \bar{F}_2)(-\bar{e}_1\sin\theta + \bar{e}_2\cos\theta)\ell\dot{\theta} = 2k^2 m\ell^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta .$$

Astfel, se obţine

$$(5) \qquad 2\ddot{\theta} = k^2\sin 2\theta .$$

Ecuaţia (5) este de tipul ecuaţiei unui pendul matematic. Din (5) se deduce integrala primă

$$(6) \qquad \dot{\theta}^2 = -k^2\cos^2\theta + h , \quad h = \text{const.}$$

Relaţiile (3) şi (5) pot fi deduse şi din ecuaţiile de mişcare ale celor două puncte şi anume

$$(7) \quad \begin{cases} m\ddot{\bar{r}}_1 = -k^2 m(x_1^* + \ell\cos\theta)\bar{e}_1 + \frac{T}{2\ell}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) , \\ m\ddot{\bar{r}}_2 = -k^2 m(x_1^* - \ell\cos\theta)\bar{e}_1 + \frac{T}{2\ell}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) . \end{cases}$$

Pentru determinarea tensiunii T a firului scriem una dintre ecuaţiile de mişcare ale lui P_1

$$m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = -T\sin\theta ,$$

de unde

$$T = m\ell(h - 2k^2\cos^2\theta) .$$

Cînd $T > 0$ firul este întins, iar cînd $T \leq 0$ punctele P_1 şi P_2 se mişcă independent.

2^o Forţele externe sînt de forma

(8) $\bar{F}_1 = -k^2 m(\bar{r}_1 - a\bar{e}_1)$, $\bar{F}_2 = -k^2 m(\bar{r}_2 + a\bar{e}_1)$.

Teorema mişcării centrului de masă (13.9) dă

(9) $$\ddot{\bar{r}}^* = -k^2 \bar{r}^* ,$$

de unde

(10) $$\bar{r}^* = \bar{r}_0^* \cos kt + \frac{\bar{v}_0^*}{k} \sin kt ,$$

deci, centrul de masă al sistemului se mişcă pe o elipsă cu centrul în O, ca şi cînd el ar fi atras de punctul O proporţional cu distanţa.

Unghiul θ se poate afla din teorema energiei cinetice faţă de centrul maselor (13.18). Energia cinetică a sistemului faţă de centrul maselor are expresia (+), stabilită la punctul 1°. Puterea forţelor externe este

$$\mathcal{P}^*_{ext} = -2ak^2 m \ell \dot{\theta} \sin\theta .$$

Prin urmare, obţinem

(11) $$\ddot{\theta} = -k^2 \frac{a}{\ell} \sin\theta .$$

Egalitatea (11) este de tipul ecuaţiei unui pendul matematic şi are integrala primă

(12) $$\dot{\theta}^2 = 2k^2 \frac{a}{\ell} \cos\theta + h , \quad h = \text{const.}$$

De asemenea, ecuaţiile (9) şi (11) pot fi deduse şi din ecuaţiile de mişcare ale celor două puncte

(13) $$\begin{cases} m\ddot{\bar{r}}_1 = -k^2 m(\bar{r}_1 - a\bar{e}_1) + \frac{T}{2\ell}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) , \\ m\ddot{\bar{r}}_2 = -k^2 m(\bar{r}_2 + a\bar{e}_1) + \frac{T}{2\ell}(\bar{r}_1 - \bar{r}_1) . \end{cases}$$

In adevăr, dacă adunăm membru cu membru egalităţile (13) găsim (9). Pe de altă parte, ecuaţiile (13), în baza lui (1), se reduc la

(14) $$-m\ell(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\bar{e}_1 + m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\bar{e}_2 =$$

$$= -k^2 m\ell(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta) + k^2 ma\bar{e}_1 - T(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta).$$

Pe componente, avem

$$(15)\quad \begin{cases} -m\ell(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = -k^2 m(\ell\cos\theta - a) - T\cos\theta , \\ m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = -k^2 m\ell\sin\theta - T\sin\theta . \end{cases}$$

Dacă eliminăm pe T din ecuaţiile (15) ajungem la ecuaţia (11).

Din (15) deducem tensiunea firului

$$T = m\left[3k^2 a\cos\theta + \ell(h-k^2)\right] .$$

Pentru $T>0$ firul este întins, iar pentru $T\leq 0$ punctele P_1, P_2 se eliberează de legătură şi se mişcă independent.

Observaţie. In cazul $a = 0$, deci cînd punctele O_1 şi O_2 coincid cu O, avem $\dot{\theta} = \text{const.}$, prin urmare, centrul de masă al sistemului se mişcă uniform pe elipsa (10) şi tensiunea firului este constantă.

277. Să se studieze mişcarea unui sistem format din două puncte materiale grele de aceeaşi masă m, invariabil legate între ele, ştiind că unul dintre puncte se mişcă fără frecare pe axa verticală Ox_3, iar al doilea punct se mişcă fără frecare pe planul orizontal x_1Ox_2.

Rezolvare. Fie P_1 punctul care se mişcă pe axa Ox_3 şi P_2 punctul care se mişcă pe planul x_1Ox_2 distanţa dintre cele două puncte este presupusă constantă în timpul mişcării şi o notăm cu 2ℓ. Acest sistem mecanic are două grade de libertate. Luăm ca parametri unghiul θ dintre vectorii $\overrightarrow{P_1P_2}$ şi $\overrightarrow{P_1O}$ şi unghiul φ dintre vectorul $\overrightarrow{OP_2}$ şi axa Ox_1. Vectorii de poziţie ai celor două puncte sînt

$$(1)\quad \bar{r}_1 = 2\ell\bar{e}_3\cos\theta , \quad \bar{r}_2 = 2\ell(\bar{e}_1\cos\varphi + \bar{e}_2\sin\varphi)\sin\theta .$$

Greutatea punctului P_2 este anihilată de reacţiunea planului orizontal x_1Ox_2, astfel încît forţele externe aplicate sistemului sînt greutatea $m\bar{g}$ a punctului P_1, forţa de

legătură $\bar{L}_1$ normală în P_1 axei Ox_3 şi forţa de legătură $\bar{L}_2$ normală în P_2 la planul x_1Ox_2.

Forţele interne aplicate punctelor P_1, P_2 sînt forţele de legătură interne $\bar{T}_1, \bar{T}_2$ care sînt de forma (2) de la problema 271.

Pentru aflarea legii mişcării avem nevoie de două ecuaţii diferenţiale care să nu conţină forţele de legătură. Aceste ecuaţii sînt furnizate de integrala primă a energiei (13.15) şi de teorema ariilor (13.11).

Energia cinetică a sistemului este

$$E = 2m\ell^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) ,$$

iar lucrul mecanic elementar al forţelor care acţionează asupra sistemului este

$$d\mathcal{L} = m\bar{g}d\bar{r}_1 = d(m\bar{g}\bar{r}_1) = d(-2mg\ell\cos\theta) ,$$

unde am presupus axa Ox_3 verticală ascendentă. Astfel, integrala primă a energiei dă

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta = -\frac{g}{\ell}\cos\theta + h , \quad h = \text{const.} \tag{2}$$

Momentul cinetic al sistemului faţă de punctul O are expresia

$$\bar{K} = m(\bar{r}_2 \times \dot{\bar{r}}_2) = 4m\ell^2\dot{\varphi}\,\bar{e}_3\sin^2\theta$$

şi momentul rezultant al forţelor externe în raport cu punctul O este

$$\bar{\mathcal{M}} = \bar{r}_1 \times (L_1\bar{e}_1 + L_1'\bar{e}_2) + \bar{r}_2 \times L_2\bar{e}_3 = 2\ell(-L_1'\bar{e}_1 + L_1\bar{e}_2)\cos\theta +$$
$$+ 2\ell L_2(\bar{e}_1\sin\varphi - \bar{e}_2\cos\varphi)\sin\theta ,$$

prin urmare, avem

$$\dot{\varphi}\sin^2\theta = C , \quad C = \text{const.} \tag{3}$$

Ecuaţiile (2) şi (3) determină legea mişcării sistemului.

Forţele de legătură externe pot fi aflate din teorema impulsului, care dă

(4) $\quad m(\ddot{\bar{r}}_1+\ddot{\bar{r}}_2) = m\bar{g} + L_1'\bar{e}_1 + L_1''\bar{e}_2 + L_2\bar{e}_3 .$

Rezultă

(5) $\quad L_1' = 2m\ell\frac{d^2}{dt^2}(\cos\varphi\sin\theta),\ L_1'' = 2m\ell\frac{d^2}{dt^2}(\sin\varphi\sin\theta),$

$$L_2 = 2m\ell\frac{d^2}{dt^2}(\cos\theta) .$$

Pentru aflarea forţelor de legătură interne utilizăm una dintre ecuaţiile de mişcare ale punctelor P_1, P_2 care sînt

(6) $$\begin{cases} m\ddot{\bar{r}}_1 = m\bar{g} + L_1'\bar{e}_1 + L_1''\bar{e}_2 + \frac{T}{2\ell}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) , \\ m\ddot{\bar{r}}_2 = L_2\bar{e}_3 + \frac{T}{2\ell}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) . \end{cases}$$

Dacă proiectăm ecuaţia $(6)_1$ pe axa Ox_3 obţinem

$$2m\ell\frac{d^2}{dt^2}(\cos\theta) = -mg - T\cos\theta ,$$

de unde găsim valoarea lui T .

<u>Observaţie</u>. Din teorema momentului cinetic deducem

$L_2\sin\varphi\sin\theta - L_1''\cos\theta = 0$, $L_2\cos\varphi\sin\theta - L_1'\cos\theta = 0$,

deci

$$L_1'\sin\varphi - L_1''\cos\varphi = 0 ,$$

prin urmare

$$\bar{L}_1 = \frac{L_1'}{\cos\varphi}(\bar{e}_1\cos\varphi + \bar{e}_2\sin\varphi) ,$$

adică forţa de legătură $\bar{L}_1$ este situată în planul OP_1P_2 .

Capitolul XIV

DINAMICA RIGIDULUI

Considerăm un corp continuu care la momentul t ocupă domeniul D. Notăm cu $\bar{\rho}$ vectorul de poziţie al unui punct generic P faţă de un reper ortonormat fix $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ şi cu $\bar{v}$ viteza corespunzătoare.

Impulsul total al mediului material care ocupă domeniul D este

(14.1) $$\bar{I} = \int_D \bar{v}\, dm .$$

Momentul cinetic total faţă de punctul Ω are expresia

(14.2) $$\bar{K} = \int_D \bar{\rho} \times d\bar{I} = \int_D (\bar{\rho} \times \bar{v}) dm ,$$

iar energia cinetică totală este dată de

(14.3) $$E = \frac{1}{2}\int_D \bar{v} d\bar{I} = \frac{1}{2}\int_D v^2 dm .$$

Teoremele lui König (13.5) şi (13.7) îşi păstrează valabilitatea şi pentru medii materiale continue.

Lucrul mecanic elementar al forţelor de masă care acţionează asupra unui corp continuu este

(14.4) $$d\mathcal{L} = dt \int_D \bar{F} d\bar{I} = dt \int_D \bar{F}\bar{v} dm ,$$

unde $\bar{F}$ este forţa specifică de masă în punctul P .

In continuare vom considera numai cazul corpului rigid. Fie $Ox_1x_2x_3$ un reper solidar cu rigidul, M masa totală a rigidului, P^* centrul de masă al acestuia, $\bar{\rho}_0$ vectorul de poziţie

al punctului O faţă de reperul fix şi $\bar{r}$ vectorul de poziţie al punctului P în raport cu reperul mobil (v.cap.II). Distribuţia vitezelor în rigid este dată de formula (2.7), în care $\bar{v}_0$ este viteza de translaţie şi $\bar{\omega}$ este vectorul rotaţiei momentane.

In cazul unui rigid avem

$$\bar{I} = M\bar{v}^* = M(\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}^*) , \tag{14.5}$$

$$\bar{K} = M(\bar{\rho}_0 \times \bar{v}^* + \bar{r}^* \times \bar{v}_0) + I_{ij}\omega_j \bar{e}_i , \tag{14.6}$$

$$2E = M\bar{v}_0(\bar{v}^* + \bar{\omega} \times \bar{r}^*) + I_{ij}\omega_i \omega_j , \tag{14.7}$$

unde I_{ij} sînt componentele tensorului de inerţie al rigidului faţă de reperul mobil şi au expresiile (11.13), iar ω_i sînt componentele vectorului $\bar{\omega}$ faţă de reperul mobil.

Intre energia cinetică totală şi momentul cinetic total faţă de punctul Ω există relaţia

$$2E = \bar{K}\bar{\omega} + M\bar{v}^*(\bar{v}_0 + \bar{\rho}_0 \times \bar{\omega}) . \tag{14.8}$$

Lucrul mecanic elementar al forţelor interne care acţionează asupra unui rigid este nul, iar lucrul mecanic elementar al forţelor externe are expresia

$$d\mathcal{L} = (\bar{v}_0 \bar{\mathcal{R}} + \bar{\omega}\bar{\mathcal{M}})dt , \tag{14.9}$$

unde $\bar{\mathcal{R}}$ şi $\bar{\mathcal{M}}$ sînt respectiv rezultanta şi momentul rezultant în raport cu punctul O , ale forţelor externe care lucrează asupra rigidului.

Teorema impulsului pentru un rigid constă în relaţia

$$M[\bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}^* + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}^*)] = \bar{\mathcal{R}} , \tag{14.10}$$

în care $\bar{a}_0$ este acceleraţia de translaţie, sau, teorema mişcării centrului de masă

$$M\bar{a}^* = \bar{\mathcal{R}} . \tag{14.11}$$

Teorema momentului cinetic pentru un rigid se exprimă prin

(14.12) $(I_{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_{jih} I_{jk}\omega_k\omega_h)\bar{e}_i + M(\bar{r}^* \times \bar{a}_o) = \overline{\mathfrak{M}}$,

unde ε_{jih} este tensorul lui Ricci definit prin (2.4).

Dacă reperul solidar cu rigidul este format din axe principale centrale de inerţie sau dacă punctul O se mişcă rectiliniu şi uniform şi reperul este format din axe principale de inerţie, relaţia (14.12) conduce la ecuaţiile lui Euler

(14.13) $$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 + (I_{33} - I_{22})\omega_2\omega_3 = \mathfrak{M}_1 , \\ I_{22}\dot{\omega}_2 + (I_{11} - I_{33})\omega_3\omega_1 = \mathfrak{M}_2 , \\ I_{33}\dot{\omega}_3 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 = \mathfrak{M}_3 . \end{cases}$$

Teorema energiei cinetice pentru un rigid are forma

(14.14) $$\dot{E} = \bar{v}_o\bar{\mathcal{R}} + \bar{\omega}\overline{\mathfrak{M}} ,$$

sau, avînd în vedere (14.11).

(14.15) $$I_{ij}\omega_i\dot{\omega}_j + M(\bar{r}^*, \bar{a}_o, \bar{\omega}) = \bar{\omega}\overline{\mathfrak{M}}$$

şi reprezintă o consecinţă a teoremelor impulsului şi momentului cinetic.

Un rigid liber are şase grade de libertate. Dacă luăm ca parametri vectorul $\bar{\rho}_o$ şi unghiurile lui Euler (v.cap.II), atunci $\bar{\mathcal{R}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}$ depind, în general, de $\bar{\rho}_o, \bar{v}_o, \varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ şi t . Pentru studiul mişcării unui rigid liber utilizăm ecuaţiile (14.10), (14.12) şi (2.21).

Condiţiile iniţiale revin la prescrierea funcţiilor $\bar{\rho}_o(t), \varphi(t), \psi(t), \theta(t)$ şi a derivatelor lor în raport cu t la momentul iniţial.

In cazul cînd rigidul este supus la legături, vectorii $\bar{\mathcal{R}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}$ conţin şi forţele de legătură.

Mişcări particulare importante ale rigidului :

A. Mişcarea de rotaţie a unui rigid. (Mişcarea unui rigid cu o axă fixă). Utilizăm notaţiile şi rezultatele privitoare

la studiul cinematic al mişcării de rotaţie a unui rigid (v. cap.II). Fie O şi O' două puncte fixe ale rigidului situate pe axa de rotaţie. Pentru a elibera rigidul de legături aplicăm în punctele O şi O' forţele de legătură necunoscute $\bar{L}$ şi $\bar{L}'$.

Unghiul de rotaţie θ satisface ecuaţia diferenţială

(14.16) $$I_{33}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_3(\theta, \dot{\theta}, t) ,$$

axa de rotaţie fiind Ox_3.

Forţele de legătură se determină din sistemul

(14.17) $$\begin{cases} \bar{L} + \bar{L}' = M\left[\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}^* + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}^*)\right] - \bar{\mathcal{R}} , \\ h(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_3, \bar{L}') = I_{\alpha\beta}\dot{\omega} + \varepsilon_{\beta\alpha 3} I_{\beta 3} \omega^2 - \mathcal{M}_\alpha , \quad \alpha, \beta = 1,2, \end{cases}$$

unde $\bar{\mathcal{R}}$ şi $\bar{\mathcal{M}}$ conţin numai forţele externe date, $h = \overline{OO'}$ şi $\omega = \dot{\theta}$.

B. <u>Mişcarea plan-paralelă a unui rigid</u>. Un asemenea sistem mecanic are trei grade de libertate (v.cap.II). In acest caz ecuaţiile mişcării sînt (14.10) şi (14.14), sau altele echivalente cu acestea.

C. <u>Mişcarea unui rigid cu un punct fix</u>. Dacă presupunem că reperul solidar cu rigidul este format din axe principale de inerţie, atunci legea mişcării rigidului se deduce din ecuaţiile lui Euler (14.13), împreună cu ecuaţiile (2.21). Forţa de legătură $\bar{L}$ aplicată în punctul fix O se determină din ecuaţia (14.10).

In cazul unui rigid greu care se mişcă în jurul punctului fix O, teorema energiei cinetice şi teorema momentului cinetic conduc la integralele prime

(14.18) $$I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2 = 2M\bar{g}\bar{r}^* + h ,$$

(14.19) $$(I_{11}\omega_1 \sin\varphi + I_{22}\omega_2 \cos\varphi)\sin\theta + I_{33}\omega_3 \cos\theta = k ,$$

unde h şi k sînt constante, iar $\bar{g} = -g\,\bar{e}_3$.

Există trei cazuri clasice în care integrarea ecuațiilor de mișcare ale unui rigid cu un punct fix se reduce la cuadraturi.

I. Cazul Euler-Poinsot. Dacă forțele exterioare care acționează asupra rigidului sînt echivalente cu o forță unică aplicată în punctul fix O, avem două integrale prime ale ecuațiilor lui Euler și anume

$$I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2 = h\ , \quad h = \text{const.}, \tag{14.20}$$

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 = k_o^2, \quad k_o = \text{const.} \tag{14.21}$$

Funcțiile $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ se determină din ecuațiile (14.20), (14.21) și din sistemul lui Euler corespunzător printr-o singură cuadratură.

Un caz particular al acestuia îl constituie rigidul greu pentru care centrul de greutate coincide cu punctul fix O.

II. Cazul Lagrange-Poisson. Se presupune că rigidul este greu, deci, au loc integralele prime (14.18) și (14.19). Dacă, în plus, elipsoidul de inerție relativ la punctul fix O este de rotație, iar centrul de greutate al corpului se află pe axa de rotație Ox_3 a elipsoidului, adică

$$I_{11} = I_{22}\ , \ x_1^* = x_2^* = 0\ , \ x_3^* \neq 0\ , \tag{14.22}$$

atunci există o a treia integrală primă, care este

$$\omega_3 = \omega_3^o = \text{const.} \tag{14.23}$$

III. Cazul Sofia Kovalevskaia. Se presupune că rigidul este greu, elipsoidul de inerție este de rotație în jurul axei Ox_3, raportul dintre semiaxa situată pe Ox_3 și raza ecuatorială este $\sqrt{2}$, iar centrul de greutate al corpului se află în planul ecuatorial x_1Ox_2 al elipsoidului, adică

$$I_{11} = I_{22} = 2I_{33}\ , \ x_2^* = x_3^* = 0,\ x_1^* \neq 0\ . \tag{14.24}$$

In afara integralelor (14.18) şi (14.19), are loc şi integrala primă

$$(14.25) \qquad \left|(\omega_1 + i\omega_2)^2 - \frac{Mgx_1^*}{I_{33}} ie^{-i\varphi}\sin\theta\right| = \text{const.}$$

Ed. Husson a demonstrat că, pentru mişcarea unui rigid greu suspendat într-un punct fix cu date iniţiale arbitrare, în afara celor trei cazuri de mai sus, nu există o a treia integrală primă algebrică distinctă de (14.18) şi (14.19).

In cazul contactului dintre două rigide (v.cap.V), acţiunile reciproce ale lor se reprezintă printr-o forţă unică, pe care o notăm cu $\bar{L}$ şi un cuplu de moment $\bar{\mathfrak{M}}^{(L)}$ care acţionează în punctul de contact .

Forţa $\bar{L}$ se descompune sub forma (8.13), unde $\bar{\Phi}$ este un vector conţinut în planul tangent comun, iar $\bar{N}$ este normal acestui plan. Vectorul $\bar{\Phi}$ se numeşte forţă de frecare la alunecare sau frecare de aderenţă. De asemenea, momentul rezultant $\bar{\mathfrak{M}}^{(L)}$ în punctul de contact se descompune sub forma

$$(14.26) \qquad \bar{\mathfrak{M}}^{(L)} = \bar{\mathfrak{M}}_t^{(L)} + \bar{\mathfrak{M}}_n^{(L)} ,$$

unde $\bar{\mathfrak{M}}_t^{(L)}$ este un vector situat în planul tangent comun şi se numeşte momentul cuplului frecării de rostogolire, iar $\bar{\mathfrak{M}}_n^{(L)}$ este normal acestui plan şi se numeşte momentul cuplului frecării de pivotare.

Legile frecării uscate dintre două rigide sînt analoge cu cele referitoare la un punct material supus la legături (v. cap.VIII şi IX). Cazurile de frecare statică sau dinamică sînt caracterizate respectiv prin relaţiile :

$$(14.27) \qquad \Phi \leq fN , \quad \bar{\Phi} = -fN\frac{\bar{v}_1}{v_1} , \text{ pentru alunecare,}$$

(14.28) $\mathcal{M}_t^{(L)} \leq \delta N$, $\overline{\mathcal{M}}_t^{(L)} = -\delta N \frac{\overline{\omega}_t}{\omega_t}$, pentru rostogolire,

(14.29) $\mathcal{M}_n^{(L)} \leq \delta' N$, $\overline{\mathcal{M}}_n^{(L)} = -\delta' N \frac{\overline{\omega}_n}{\omega_n}$, pentru pivotare,

unde f, δ şi δ' sînt respectiv coeficienţii de frecare la alunecare, de rostogolire şi de pivotare, Coeficientul f este adimensional, iar δ şi δ' au dimensiunile unei lungimi. Aceşti coeficienţi depind numai de natura suprafeţelor în contact şi se determină în mod experimental. Se consideră legile de frecare statică sau dinamică pentru una dintre mişcările componente de alunecare, rostogolire sau pivotare, după cum în mişcarea relativă a celor două rigide lipseşte sau există mişcarea componentă respectivă.

278. O placă rigidă plană se mişcă în planul $\xi_1 \Omega \xi_2$, un punct O al său fiind legat de punctul Ω printr-o bară de lungime invariabilă ℓ şi fără masă. Să se afle momentul cinetic al plăcii în raport cu punctul Ω şi energia cinetică a sa.

Rezolvare. Fie P^* centrul de masă al plăcii şi $x_1 O x_2$ un reper solidar cu placa avînd axa Ox_1 colinară cu vectorul $\overline{OP^*} = \overline{r}^*$. Avem două grade de libertate.

Dacă notăm

$$\overline{OP^*} = a \ , \ \sphericalangle(\Omega\xi_1, \Omega O) = \varphi \ , \ \sphericalangle(\Omega\xi_1, OP^*) = \theta \ ,$$

atunci

(1) $\overline{e}_1 = \overline{\varepsilon}_1 \cos\theta + \overline{\varepsilon}_2 \sin\theta$, $\overline{e}_2 = -\overline{\varepsilon}_1 \sin\theta + \overline{\varepsilon}_2 \cos\theta$, $\overline{\omega} = \dot{\theta}\overline{e}_3$.

Astfel, putem scrie

(2) $\overline{\rho}_0 = \ell(\overline{\varepsilon}_1 \cos\varphi + \overline{\varepsilon}_2 \sin\varphi) = \ell\left[\overline{e}_1 \cos(\varphi - \theta) + \overline{e}_2 \sin(\varphi - \theta)\right]$,

(3) $\overline{r}^* = a(\overline{\varepsilon}_1 \cos\theta + \overline{\varepsilon}_2 \sin\theta) = a\overline{e}_1$,

(4) $\overline{v}_0 = \ell\dot{\varphi}(-\overline{\varepsilon}_1 \sin\varphi + \overline{\varepsilon}_2 \cos\varphi) = \ell\dot{\varphi}\left[\overline{e}_1 \sin(\theta - \varphi) + \overline{e}_2 \cos(\theta - \varphi)\right]$,

(5) $\bar{v}^* = \bar{v}_0 + a\dot{\theta}(-\bar{\varepsilon}_1 \sin\theta + \bar{\varepsilon}_2 \cos\theta) = \bar{v}_0 + a\dot{\theta}\bar{e}_2$.

Avînd în vedere relaţiile (1)-(5) din (14.6) şi (14.7) obţinem respectiv

(6) $\bar{K} = \left\{ M\left[\ell^2\dot{\varphi} + a\ell(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\theta-\varphi)\right] + I_0\dot{\theta} \right\} \bar{e}_3$

şi

(7) $2E = M\left[\ell^2\dot{\varphi}^2 + 2a\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\right] + I_0\dot{\theta}^2$,

unde M este masa plăcii, iar $I_0 = I_{33}$ este momentul de inerţie al plăcii în raport cu punctul O sau cu axa Ox_3 .

Dacă notăm cu I^* momentul de inerţie al plăcii în raport cu centrul de masă al său, atunci conform teoremei lui Steiner (v. formula (11.10)) avem

$$I_0 = I^* + a^2 M ,$$

astfel încît formulele (6) şi (7) devin respectiv

(6') $\bar{K} = \left\{ M\left[\ell^2\dot{\varphi} + a^2\dot{\theta} + a\ell(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\theta-\varphi)\right] + I^*\dot{\theta} \right\} \bar{e}_3$,

(7') $2E = M\left[\ell^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\right] + I^*\dot{\theta}^2$.

Observaţie. Relaţiile (6') şi (7') pot fi deduse şi cu ajutorul teoremelor lui König (v. formulele (13.5) şi (13.7)). Mişcarea plăcii în raport cu centrul de masă al său este o rotaţie cu viteza unghiulară $\dot{\theta}\bar{e}_3$, astfel încît avem

$$\bar{K}^* = I^*\dot{\theta}\bar{e}_3 , \quad E^* = \frac{1}{2} I^*\dot{\theta}^2 ,$$

iar

$$\bar{K} = M(\bar{\rho}^* \times \bar{v}^*) + \bar{K}^*, \quad E = \frac{1}{2} M v^{*2} + E^* ,$$

unde

$$\bar{\rho}^* = \bar{\rho}_0 + \bar{r}^* .$$

279. O placă rigidă plană se mişcă într-un plan x_1Ox_2 care se roteşte uniform în jurul axei Ox_2. Să se calculeze momentul cinetic în raport cu axa Ox_2 şi energia cinetică pentru placa dată.

Rezolvare. Notăm cu ω mărimea constantă a vectorului de rotaţie a planului x_1Ox_2 în jurul axei Ox_2 şi luăm un reper

$y_1P^*y_2$, solidar cu placa, format din axele principale centrale de inerţie ale acesteia. Poziţia plăcii în planul x_1Ox_2 o definim prin coordonatele x_1^*, x_2^* ale centrului de masă P^* şi unghiul θ dintre axele P^*y_1 şi Ox_1. Fie P un punct generic al corpului şi y_1, y_2 coordonatele sale faţă de reperul $y_1P^*y_2$. Cantităţile y_1, y_2 rămîn constante în timpul mişcării şi satisfac relaţiile

$$(1) \qquad \int_D y_1 dm = \int_D y_2 dm = 0 , \quad \int_D y_1 y_2 dm = 0 ,$$

în care D este domeniul ocupat de placă la momentul t.

Vectorul de poziţie al punctului P în raport cu reperul x_1Ox_2 este

$$(2) \quad \bar{r} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = (x_1^* + y_1\cos\theta - y_2\sin\theta)\bar{e}_1 + (x_2^* + y_1\sin\theta + y_2\cos\theta)\bar{e}_2 .$$

Dacă ţinem seama de formulele lui Poisson (2.2), deducem că viteza absolută a punctului P are expresia

$$(3) \quad \bar{v} = \left[\dot{x}_1^* - \dot{\theta}(y_1\sin\theta + y_2\cos\theta)\right]\bar{e}_1 + \left[\dot{x}_2^* + \dot{\theta}(y_1\cos\theta - y_2\sin\theta)\right]\bar{e}_2 - \dot{\omega}(x_1^* + y_1\cos\theta - y_2\sin\theta)\bar{e}_3 .$$

Momentul cinetic al plăcii în raport cu axa Ox_2 este dat de

$$K_2 = \bar{K}\bar{e}_2 = \int_D (\bar{e}_2, \bar{r}, \bar{v}) dm = \omega \int_D x_1^2 \, dm ,$$

prin urmare

$$(4) \qquad K_2 = I_{22}\omega = (Mx_1^{*2} + I_{11}^*\sin^2\theta + I_{22}^*\cos^2\theta)\omega ,$$

în care M este masa plăcii, I_{22} este momentul de inerţie al plăcii în raport cu axa Ox_2, iar I_{11}^* şi I_{22}^* sînt momentele principale de inerţie în P^* .

Energia cinetică a plăcii este dată de

$$(5) \qquad 2E = \int_D v^2 dm = M(\dot{x}_1^{*2} + \dot{x}_2^{*2}) + I^*\dot{\theta}^2 + I_{22}\omega^2 ,$$

unde $I^* = I_{11}^* + I_{22}^*$ este momentul de inerţie al plăcii în raport cu P^*.

Observaţie. Distribuţia vitezelor în corp, dată de formula (3), poate fi dedusă şi cu ajutorul relaţiei (4.1). In cazul de faţă avem

$$\bar{v}_1=0,\ \bar{v}_2=\dot{x}_1^*\bar{e}_1+\dot{x}_2^*\bar{e}_2,\ \bar{\omega}_1=\omega\bar{e}_2,\ \bar{\omega}_2=\dot{\theta}\bar{e}_3,\ \bar{r}_1=\bar{r},\ \bar{r}_2=\bar{r}-r^*\ .$$

280. Un romb articulat format din patru bare identice, omogene, de aceeaşi masă m şi de aceeaşi lungime 2a, se mişcă în planul $\xi_1\Omega\xi_2$. Să se afle momentul cinetic al rombului faţă de punctul Ω şi energia cinetică a sa.

Rezolvare. Notăm cu A_i, $i=\overline{1,4}$, vîrfurile rombului (v. fig.25). Acest sistem mecanic are patru grade de libertate. Luăm ca parametri ai sistemului coordonatele ξ_1^*, ξ_2^* ale centrului de masă P^*, unghiul θ pe care îl face vectorul $\overrightarrow{P^*A_1}$ cu axa $\Omega\xi_1$ şi unghiul φ, jumătatea unghiului din A_1 al rombului.

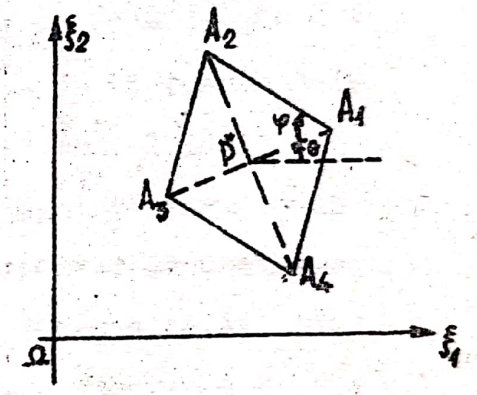

Fig.25

Momentul cinetic al rombului faţă de punctul Ω se poate calcula cu ajutorul teoremei lui König (v. relaţia (13.5)). Astfel, avem

$$\bar{K}=4m(\xi_1^*\dot{\xi}_2^*-\xi_2^*\dot{\xi}_1^*)\bar{\varepsilon}_3+\bar{K}^*\ , \tag{1}$$

unde $\bar{K}^*$ este suma momentelor cinetice ale laturilor rombului faţă de P^*.

La rîndul lor, momentele cinetice ale laturilor rombului în raport cu P^* se pot calcula tot prin intermediul teoremei lui König. Dacă notăm cu B_i mijlocul laturii A_iA_{i+1}, $i=\overline{1,4}$, $A_5\equiv A_1$, deducem

$$(2)\quad \begin{cases} \overrightarrow{P^*B_1} = -\overrightarrow{P^*B_3} = a\left[\bar{\varepsilon}_1\cos(\theta+\varphi)+\bar{\varepsilon}_2\sin(\theta+\varphi)\right], \\ \overrightarrow{P^*B_2} = -\overrightarrow{P^*B_4} = -a\left[\bar{\varepsilon}_1\cos(\theta-\varphi)+\bar{\varepsilon}_2\sin(\theta-\varphi)\right]. \end{cases}$$

Fie $\bar{K}_i^*$ momentul cinetic al laturii A_iA_{i+1} faţă de punctul P^* şi $\bar{K}_i^{**}$ momentul cinetic al laturii A_iA_{i+1} faţă de punctul B_i, $i=\overline{1,4}$, $A_5 \equiv A_1$. Avem

$$(3)\quad \begin{cases} \bar{K}_1^* = m(\bar{r}_1 \times \dot{\bar{r}}_1)+\bar{K}_1^{**}, \quad \bar{K}_3^* = m(\bar{r}_1 \times \dot{\bar{r}}_1)+\bar{K}_3^{**}, \\ \bar{K}_2^* = m(\bar{r}_2 \times \dot{\bar{r}}_2)+\bar{K}_2^{**}, \quad \bar{K}_4^* = m(\bar{r}_2 \times \dot{\bar{r}}_2)+\bar{K}_4^{**}, \end{cases}$$

unde am pus $\bar{r}_1 = \overrightarrow{P^*B_1}$, $\bar{r}_2 = \overrightarrow{P^*B_2}$.

Deoarece unghiul dintre laturile paralele A_1A_2 şi A_4A_3 cu axa $\Omega\xi_1$ este egal cu $\pi+\theta-\varphi$, rezultă că vectorul rotaţiei momentane al acestor laturi este $(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\bar{\varepsilon}_3$. De asemenea, unghiul dintre laturile paralele A_4A_1 şi A_3A_2 cu axa $\Omega\xi_1$ este egal cu $\theta+\varphi$, deci, vectorul rotaţiei momentane corespunzător este $(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\bar{\varepsilon}_3$. Cu acestea, utilizînd formula (14.6) pentru $\bar{\rho}_0 = \bar{r}^* = 0$, obţinem

$$(4)\quad \bar{K}_1^{**} = \bar{K}_3^{**} = I_{33}(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\bar{\varepsilon}_3, \quad \bar{K}_2^{**} = \bar{K}_4^{**} = I_{33}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\bar{\varepsilon}_3.$$

Avînd în vedere că momentul de inerţie I_{33} al unei laturi în raport cu o axă perpendiculară pe mijlocul său este egal cu $\frac{ma^2}{3}$ (v. formula (16) de la problema 247), găsim

$$(5)\quad \bar{K}_1^* = \bar{K}_3^* = \frac{2ma^2}{3}(2\dot{\theta}+\dot{\varphi})\bar{\varepsilon}_3, \quad \bar{K}_2^* = \bar{K}_4^* = \frac{2ma^2}{3}(2\dot{\theta}-\dot{\varphi})\bar{\varepsilon}_3,$$

de unde

$$(6)\quad \bar{K}^* = \sum_1^4 \bar{K}_i^* = \frac{16ma^2}{3}\dot{\theta}\bar{\varepsilon}_3,$$

prin urmare, avem

$$(7)\quad \bar{K} = 4m\left(\xi_1^*\dot{\xi}_2^* - \xi_2^*\dot{\xi}_1^* + \frac{4a^2}{3}\dot{\theta}\right)\bar{\varepsilon}_3.$$

In mod analog, utilizînd teorema lui König pentru energia cinetică (v. formula (13.17)), putem scrie

(8) $$E = 2m(\dot{\xi}_1^{*2} + \dot{\xi}_2^{*2}) + E^*,$$

unde E^* este energia cinetică a sistemului faţă de punctul P^*.

Notînd cu E_i^* şi E_i^{**} energia cinetică a laturii A_iA_{i+1} faţă de punctul P^* şi respectiv B_i, avem (v.formula 14.7))

(9) $$E_1^{**} = E_3^{**} = \frac{ma^2}{6}(\dot{\theta} - \dot{\varphi})^2 , \quad E_2^{**} = E_4^{**} = \frac{ma^2}{6}(\dot{\theta} - \dot{\varphi})^2 ,$$

(10) $$\begin{cases} E_1^* = E_3^* = \frac{ma^2}{6}\left[3(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + (\dot{\theta} - \dot{\varphi})^2\right], \\ E_2^* = E_4^* = \frac{ma^2}{6}\left[3(\dot{\theta} - \dot{\varphi})^2 + (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2\right], \end{cases}$$

deci

(11) $$E^* = \frac{4ma^2}{3}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

şi

(12) $$E = 2m\left[\dot{\xi}_1^{*2} + \dot{\xi}_2^{*2} + \frac{4a^2}{3}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)\right].$$

Observaţie. Dacă φ = const., atunci sistemul este rigid şi putem aplica formulele (14.6) şi (14.7). In cazul de faţă sistemul are trei grade de libertate şi

$$\bar{\rho}_o = \xi_1^* \bar{\varepsilon}_1 + \xi_2^* \bar{\varepsilon}_2 , \quad \bar{r}^* = 0, \quad \bar{\omega} = \dot{\theta}\,\bar{\varepsilon}_3 .$$

281. O placă rigidă omogenă triunghiulară se roteşte uniform în jurul unei laturi. Să se afle momentul cinetic al plăcii faţă de mijlocul laturii fixe şi energia cinetică a sa.

Rezolvare. Considerăm triunghiul ABC care se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul laturii BC. Alegem un reper x_1Ox_2 solidar cu triunghiul, astfel încît axa Ox_1 să fie coliniară cu vectorul $\overrightarrow{BC}$, iar Ox_2 de-a lungul mediatoarei laturii BC a triunghiului. Fie b şi c coordonatele punctului A, iar 2a lungimea laturii BC.

Fiind vorba de un rigid cu un ax fix, avem

(1) $$\bar{\rho}_o = 0 , \quad \bar{v}_o = 0 , \quad \bar{\omega} = \omega\bar{e}_1 .$$

Deoarece corpul se află în planul x_1Ox_2, rezultă $I_{13}=0$, prin urmare, formulele (14.6) şi (14.7) se reduc respectiv la

(2) $$\overline{K} = (I_{11}\overline{e}_1 + I_{12}\overline{e}_2)\omega$$

şi

(3) $$E = \frac{1}{2} I_{11}\omega^2 .$$

Astfel problema s-a redus la găsirea momentului de inerţie I_{11} şi a momentului centrifugal I_{12}. Cum ecuaţiile laturilor AB şi AC sînt respectiv

$$x_2 = \frac{c}{b+a}(x_1+a) , \quad x_2 = \frac{c}{b-a}(x_1-a) ,$$

deducem

$$I_{11} = \rho\int_0^c x_2^2 dx_2 \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 = \frac{1}{6}Mc^2 , \quad I_{12} = \rho\int_0^c x_2 dx_2 \int_{x_1'}^{x_1''} x_1 dx_1 = \frac{1}{6}Mbc ,$$

unde $x_1' = \frac{b+a}{c}x_2 - a$, $x_1'' = \frac{b-a}{c}x_2 + a$, ρ este densitatea plăcii, iar $M = \rho ac$ este masa sa. Rezultă

$$\overline{K} = \frac{1}{6} Mc\,\omega(c\overline{e}_1 + b\overline{e}_2) , \quad E = \frac{1}{12} Mc^2\omega^2 .$$

Observaţie. Această problemă este un caz particular al problemei 279.

282. Extremităţile unei bare omogene AB de masă M şi de lungime $R\sqrt{3}$ se mişcă, fără frecare, pe un cerc vertical de rază R. Mijlocul O al barei este respins de diametrul vertical al cercului cu o forţă proporţională cu distanţa, la unitatea de distanţă mărimea forţei fiind $\frac{4Mg}{R}$. Presupunînd că la momentul $t = 0$ bara este verticală şi nu are viteză unghiulară, să se studieze mişcarea sa.

Rezolvare. Luăm un reper $\xi_1\Omega\xi_2$ cu originea în centrul cercului, axa $\Omega\xi_1$ verticală descendentă şi axa $\Omega\xi_2$ orizontală. Deoarece bara este presupusă omogenă centrul său de masă coincide cu punctul O. Bara AB supusă la legătura

din enunţ constituie un sistem mecanic cu un grad de libertate, deci avem un sistem mecanic cu legături complete. Alegem ca parametru al sistemului unghiul θ dintre vectorul $\bar{\rho}_0 = \overrightarrow{\Omega O}$ şi axa $\Omega\xi_1$. Astfel avem

(1) $$\bar{\rho}_0 = \frac{R}{2}(\bar{\varepsilon}_1\cos\theta + \bar{\varepsilon}_2\sin\theta), \quad \bar{r}^* = 0, \quad \bar{\omega} = \dot{\theta}\bar{\varepsilon}_3 .$$

Din enunţ rezultă următoarele condiţii iniţiale

(2) $$t = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = 0 .$$

Forţele date care acţionează asupra barei sînt echivalente cu o forţă unică, aplicată în punctul O şi a cărei expresie este

(3) $$\bar{F} = Mg(\bar{\varepsilon}_1 + 2\bar{\varepsilon}_2\sin\theta),$$

iar forţele de legătură, aplicate la extremităţile barei, sînt de forma

(4) $$\begin{cases} \bar{L}_A = -L_A\left[\bar{\varepsilon}_1\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) + \bar{\varepsilon}_2\sin(\theta - \frac{\pi}{3})\right], \\ \bar{L}_B = -L_B\left[\bar{\varepsilon}_1\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) + \bar{\varepsilon}_2\sin(\theta + \frac{\pi}{3})\right]. \end{cases}$$

Pentru determinarea legii mişcării avem nevoie de o ecuaţie diferenţială cu funcţia necunoscută $\theta(t)$ şi care să nu conţină forţele de legătură. O asemenea ecuaţie ne este furnizată de către teorema momentului cinetic în raport cu punctul Ω. In adevăr, dacă luăm un reper x_1Ox_2 solidar cu bara, astfel încît Ox_1 să fie coliniară cu $\overrightarrow{OA}$, iar Ox_2 perpendiculară pe bară, axele Ox_1 şi Ox_2 sînt axe principale centrale de inerţie şi avem

(5) $$I_{11} = 0, \quad I_{22} = I_{33} = \frac{MR^2}{4},$$

(v. formula (16), problema 247).

Deoarece în acest caz

$$\bar{v}_0 = \bar{v}^* = \frac{R}{2}\dot{\theta}(-\bar{\varepsilon}_1\sin\theta + \bar{\varepsilon}_2\cos\theta),$$

din relaţia (14.6) obţinem

(6) $$\bar{K} = \frac{MR^2}{2}\dot{\theta}\bar{\varepsilon}_3 .$$

Momentul rezultant faţă de punctul Ω al forţelor care acţionează asupra barei este

$$\overline{\mathcal{M}} = \overline{\rho}_0 \times \overline{F} = \frac{MgR}{2}\overline{\varepsilon}_3(\sin 2\theta - \sin\theta) . \tag{7}$$

Prin urmare, teorema momentului cinetic în raport cu punctul Ω se reduce la a treia ecuaţie a lui Euler (14.13) şi dă

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}(\sin 2\theta - \sin\theta) . \tag{8}$$

Ecuaţia diferenţială (8) şi condiţiile iniţiale (2) conduc la integrala primă

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)\cos\theta . \tag{9}$$

Din egalitatea (9) deducem

$$\frac{d(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2} - 1}} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}}\,dt ,$$

de unde

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{ch} t\sqrt{\frac{g}{R}} . \tag{10}$$

Pentru determinarea forţelor de legătură utilizăm teorema mişcării centrului de masă (14.11) care are forma

$$M\ddot{\overline{\rho}}_0 = \overline{L}_A + \overline{L}_B + Mg(\overline{\varepsilon}_1 + 2\overline{\varepsilon}_2\sin\theta) . \tag{11}$$

Dacă ţinem seama de relaţiile (8) şi (9) găsim

$$\ddot{\overline{\rho}}_0 = \frac{g}{2}\left[(1 - 2\cos\theta - 3\cos^2\theta + 4\cos^3\theta)\overline{\varepsilon}_1 + (4\cos\theta - 3)\overline{\varepsilon}_2\sin\theta\cos\theta\right] .$$

Astfel ecuaţia (11) conduce la

$$\overline{L}_A + \overline{L}_B = \frac{Mg}{2}\left[(4\cos^3\theta - 3\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)\overline{\varepsilon}_1 + (4\cos^2\theta - 3\cos\theta - 4)\overline{\varepsilon}_2\sin\theta\right] , \tag{12}$$

care împreună cu (4) dau

$$L_A + L_B = 2Mg(2 + 2\cos\theta - 3\cos^2\theta), \quad L_A - L_B = \frac{mg}{\sqrt{3}}(\sin\theta - \sin 2\theta) ,$$

de unde

$$L_A = \frac{Mg}{2\sqrt{3}}\left[\sin\theta - \sin 2\theta + 2\sqrt{3}(2 + 2\cos\theta - 3\cos^2\theta)\right] ,$$

$$L_B = \frac{Mg}{2\sqrt{3}}\left[\sin 2\theta - \sin\theta + 2\sqrt{3}(2 + 2\cos\theta - 3\cos^2\theta)\right] .$$

Observaţii. 1°. Expresia (6) a momentului cinetic poate fi dedusă şi cu ajutorul teoremei lui König, sau pornind direct de la definiţia sa.

2°. Ecuaţia (8) se poate obţine şi din teorema energiei cinetice (14.14). Pentru calcularea energiei cinetice a barei utilizăm formula (14.7) şi găsim

$$E = \frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2 \quad \text{(v. şi observaţia 1°)}.$$

283. Să se studieze mişcarea unui disc circular de rază R, omogen, greu, care se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă înclinată cu unghiul ascuţit α faţă de un plan orizontal.

Rezolvare. Considerăm planul vertical $\xi_1 \Omega \xi_2$ astfel încît axa $\Omega\xi_1$ are ca suport dreapta pe care se mişcă discul dat (v.fig.26). Sistemul mecanic format din discul mobil este cu legături complete. Poziţia discului depinde de un singur parametru, unghiul de rotaţie $\theta = \widehat{AOB}$, sau de abscisa centrului $\Omega A = \xi_1^0 = R\theta$, dacă presupunem că la momentul iniţial punctul B coincide cu Ω (v.şi problema 52). Condiţia rostogolirii fără alunecare a discului se poate realiza fie cu ajutorul unui fir întins pe $\Omega\xi_1$ şi înfăşurat pe disc, fie prevăzînd discul şi dreapta fixă cu dinţi foarte mici.

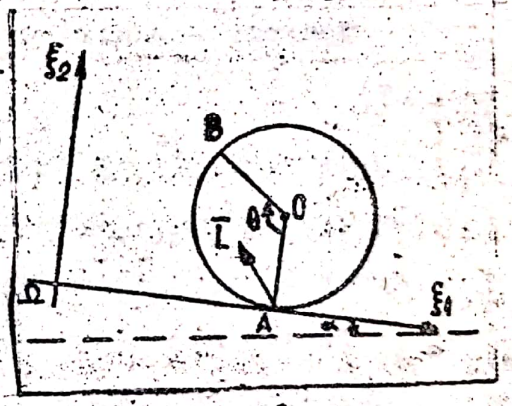

Fig.26

Forţele care acţionează asupra discului sînt greutatea proprie $M\bar{g}$ aplicată în centrul său O şi forţa de legătură $\bar{L}$ aplicată în punctul de contact cu $\Omega\xi_1$, unde M este masa discului.

Legea mişcării discului se poate afla din teorema energiei cinetice. Pentru a calcula energia cinetică a discului putem utiliza teorema lui König. Energia cinetică a centrului discului dotat cu masa M este egală cu $\frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2$, iar energia cinetică a discului faţă de centrul său este

$$E^* = \frac{1}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 , \tag{1}$$

deoarece această mişcare relativă este o rotaţie cu viteza unghiulară $\bar{\omega} = -\dot{\theta}\,\bar{\varepsilon}_3$.

Astfel, energia cinetică a discului este

$$E = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 . \tag{2}$$

Forţa de legătură $\bar{L}$ se descompune sub forma

$$\bar{L} = -\Phi\,\bar{\varepsilon}_1 + N\,\bar{\varepsilon}_2 , \tag{3}$$

prin urmare, lucrul mecanic elementar al forţelor care acţionează asupra discului, conform formulei (14.9), este

$$d\mathcal{L} = RMgd\theta \sin\alpha . \tag{4}$$

Teorema energiei cinetice (v. formula (14.14)) conduce la

$$R\ddot{\theta} = \frac{2}{3} g \sin\alpha . \tag{5}$$

Ecuaţia (5) ne arată că centrul discului descrie o paralelă la axa $\Omega\xi_1$, cu o mişcare uniform variată şi mărimea acceleraţiei sale este mai mică decît g.

Pentru a calcula proiecţiile $-\Phi$ şi N ale reacţiunii $\bar{L}$ pe axele $\Omega\xi_1$ şi $\Omega\xi_2$, utilizăm teorema mişcării centrului de masă (14.11). Deoarece

$$\bar{a}^* = \bar{a}_0 = \ddot{\xi}_1^0 \bar{\varepsilon}_1 = \frac{2}{3} g\,\bar{\varepsilon}_1 \sin\alpha$$

şi

$$\bar{\mathcal{R}} = M\bar{g} - \Phi\bar{\varepsilon}_1 + N\bar{\varepsilon}_2 ,$$

deducem

$$\Phi = \frac{1}{3} Mg \sin\alpha , \quad N = Mg\cos\alpha , \tag{6}$$

prin urmare, reacţiunea axei $\Omega\xi_1$ este constantă.

Observaţii. 1°. Ecuaţia (5) poate fi obţinută şi din teorema momentului cinetic, împreună cu teorema mişcării centrului de masă. In adevăr, momentul cinetic al discului faţă de punctul Ω este

$$\bar{K} = -\frac{3}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 \bar{\varepsilon}_3 ,$$

iar momentul rezultant al forţelor externe faţă de Ω are expresia

$$\bar{\mathfrak{M}} = (\xi_1^0 N - Mg \xi_1^0 \cos\alpha - MRg \sin\alpha) \bar{\varepsilon}_3 ,$$

deci

$$(7) \qquad -\frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta} = (N - Mg \cos\alpha) \xi_1^0 - MEg \sin\alpha .$$

Cum ecuaţiile mişcării centrului de masă au forma

$$(8) \qquad MR\ddot{\theta} = Mg \sin\alpha - \Phi , \quad 0 = -Mg \cos\alpha + N ,$$

din (7) şi (8) regăsim (5) şi (6).

De asemenea, în locul teoremei momentului cinetic faţă de punctul Ω, putem folosi teorema momentului cinetic faţă de punctul O. Avem

$$\bar{K}^* = -\frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} \bar{\varepsilon}_3 , \quad \bar{\mathfrak{M}}^* = -R\Phi \bar{\varepsilon}_3 ,$$

prin urmare

$$(9) \qquad \frac{MR}{2} \ddot{\theta} = \Phi ,$$

de unde, în baza lui (8), recăpătăm (5) şi (6).

2°. In acelaşi mod se tratează şi problema în care discul este înlocuit cu o sferă plină omogenă şi nedeformabilă. In acest caz discul din figura 26 reprezintă intersecţia sferei cu planul vertical $\xi_1 \Omega \xi_2$.

După teorema lui König, energia cinetică a sferei este

$$E = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{5} MR^2 \dot{\theta}^2 = \frac{7}{10} MR^2 \dot{\theta}^2 .$$

Se obţine ecuaţia mişcării

$$R\ddot{\theta} = \frac{5}{7} g \sin\alpha .$$

284. Să se studieze mişcarea unui disc circular omogen care alunecă, fără frecare, pe un plan orizontal fix, astfel încît un punct O al marginii sale se mişcă uniform pe un cerc dat.

Rezolvare. Luăm un reper fix $\xi_1 \Omega \xi_2$ cu originea în centrul cercului dat şi axa $\Omega\xi_1$ coliniară cu poziţia iniţială a vectorului $\overrightarrow{\Omega O}$. Fie R raza cercului dat, r raza discului, M masa sa şi P^* centrul său (care coincide cu centrul de masă). Sistemul mecanic format din discul mobil este un caz particular al aceluia considerat la problema 278. Cu notaţiile de la problema citată, în cazul de faţă avem $\ell = R$, $a = r$, $\varphi = \alpha t$, $\alpha = \text{const}$. Prin urmare, avem un sistem mecanic cu un grad de libertate, supus la o legătură reonomă. Parametrul mişcării este unghiul θ pe care îl face $\overrightarrow{OP^*}$ cu axa $\Omega\xi_1$.

Singura forţă exterioară care acţionează asupra discului este forţă de legătură $\bar{L}$, aplicată în punctul O.

Deoarece momentul forţei $\bar{L}$ în raport cu punctul O este nul, pentru aflarea legii mişcării folosim teorema energiei cinetice sub forma (14.15).

Momentul de inerţie al discului în raport cu o perpendiculară prin centru la planul său fiind $\frac{1}{2}Mr^2$, rezultă că momentul de inerţie al discului în raport cu punctul O (sau cu perpendiculara Ox_3 pe planul discului) este

(1) $$I_{33} = I_O = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2 .$$

Din formulele (1)-(4) de la problema 278 deducem

(2) $$(\bar{r}^*, \bar{a}_O, \bar{\omega}) = rR\alpha^2\dot{\theta}\sin(\theta - \alpha t) ,$$

astfel încît ecuaţia (14.15) conduce la

(3) $$\ddot{\theta} + \frac{2R}{3r}\alpha^2 \sin(\theta - \alpha t) = 0 ,$$

Dacă punem $\theta - \alpha t = \psi$, egalitatea (3) devine

(4) $$\ddot{\psi} + \frac{2R}{3r}\alpha^2 \sin\psi = 0 ,$$

ecuaţie care este analogă cu aceea a unui pendul simplu. Mişcarea pendulară definită de ecuaţia (4) reprezintă mişcarea relativă a discului faţă de un reper solidar cu dreapta $\Omega 0$.

Pentru determinarea forţei de legătură $\bar{L}$ utilizăm teorema mişcării centrului de masă (14.11). Mai întîi, din relaţia (5) de la problema 278 rezultă

$$\bar{a}^* = -(R\alpha^2\cos\alpha t + r\ddot{\theta}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta)\,\bar{\varepsilon}_1 -$$

$$-(R\alpha^2\sin\alpha t - r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta)\,\bar{\varepsilon}_2$$

şi apoi

$$\bar{L} = M\bar{a}^* .$$

285. Să se studieze mişcarea, fără frecare, pe un plan orizontal a unei bare rigide de masă M şi de lungime 2ℓ , ale cărui particule sînt atrase de axa fixă $\Omega\xi_1$ proporţional cu masele şi cu distanţele respective.

Rezolvare. Considerăm reperul fix $\xi_1\Omega\xi_2$ şi bara AB . Avem un sistem mecanic cu trei grade de libertate. Poziţia barei la un moment dat o determinăm prin coordonatele ξ_1^*, ξ_2^* ale centrului de masă P^* al barei şi unghiul θ pe care îl face dreapta AB cu axa $\Omega\xi_1$. Prin punctul P^* ducem axele $P^*\xi$ şi $P^*\eta$ paralele şi la fel orientate cu axele $\Omega\xi_1$ şi $\Omega\xi_2$ respectiv. Coordonatele ξ_1, ξ_2 faţă de reperul $\xi_1\Omega\xi_2$ ale unui punct P al barei, sînt legate de coordonatele sale ξ , η faţă de reperul $\xi P^*\eta$ prin formulele

(1) $$\xi_1 = \xi_1^* + \xi \quad , \quad \xi_2 = \xi_2^* + \eta \quad .$$

In acest caz, fiind vorba de o mişcare plană, vectorul rotaţiei momentane este $\bar{\omega} = \dot{\theta}\bar{\varepsilon}_3$.

Forţa specifică de masă în punctul P al barei are expresia

(2) $$\bar{F}(P) = -k^2\xi_2\bar{\varepsilon}_2, \quad k = \text{const.}$$

Pentru aflarea legii mişcării avem nevoie de trei ecuaţii diferenţiale cu funcţiile necunoscute $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ şi $\theta(t)$.

Funcţiile $\xi_1(t)$ şi $\xi_2(t)$ se determină din teorema mişcării centrului de masă. Deoarece rezultanta forţelor externe care acţionează asupra barei are expresia

$$(3) \qquad \bar{\mathcal{R}} = \int_{AB} \bar{F}(P)dm = -k^2 M \xi_2^* \bar{\varepsilon}_2 ,$$

ecuaţia (14.11) conduce la

$$(4) \qquad \ddot{\xi}_1^* = 0 , \quad \ddot{\xi}_2^* = -k^2 \xi_2^* ,$$

de unde

$$(5) \qquad \xi_1^* = C_1 t + C_2 , \quad \xi_2^* = C_3 \sin(kt + C_4) ,$$

unde C_i , $i = \overline{1,4}$, sînt constante de integrare.

Dacă eliminăm pe t din ecuaţiile (5) deducem că traiectoria punctului P^* are forma unei sinusoide

$$(6) \qquad \xi_2^* = C_3 \sin\left[\frac{k}{C_1}(\xi_1^* - C_2) + C_4\right] .$$

Funcţia $\theta(t)$ poate fi determinată din teorema momentului cinetic faţă de centrul de masă (v.formula (13.12)). Momentul cinetic al barei în mişcarea faţă de reperul $\xi P^* \eta$ este

$$(7) \qquad \bar{K}^* = I^* \dot{\theta} \bar{\varepsilon}_3 ,$$

unde I^* este momentul de inerţie al barei în raport cu punctul P^*, iar momentul rezultant al forţelor externe faţă de punctul P^* este

$$(8) \qquad \bar{\mathcal{M}}^* = \int_{AB} \overrightarrow{P^*P} \times \bar{F}(P)dm = -k^2 \bar{\varepsilon}_3 \int_{AB} (\xi_2^* + \eta)\xi \, dm = -k^2 I^* \bar{\varepsilon}_3 \sin\theta\cos\theta .$$

Astfel obţinem

$$(9) \qquad \ddot{\theta} = -k^2 \sin\theta\cos\theta ,$$

ecuaţie care este analogă cu aceea a unui pendul simplu (pentru unghiul $\varphi = 2\theta$).

Din (9) rezultă

$$(10) \qquad \dot{\theta}^2 = \alpha^2 - k^2 \sin^2\theta ,$$

unde α este valoarea lui $\dot{\theta}$ pentru $\theta = 0$.

Prin urmare, bara execută oscilaţii de o parte şi de alta a lui $P^*\xi$ sau se roteşte mereu în acelaşi sens în jurul punctului P^*, după cum α^2 este mai mic sau mai mare decît k^2. Pentru $\alpha^2 = k^2$, avem

$$\dot{\theta} = k\cos\theta \ , \text{ sau } \ tg\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{kt} \ ,$$

unde am fixat originea lui t la momentul cînd $\theta = 0$. In acest caz bara tinde să se plaseze paralel la $\Omega\xi_2$, dar ea nu ajunge într-un interval de timp finit în această poziţie, fiindcă pentru $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, t tinde la infinit.

Observaţii. 1° Ecuaţia (9) poate fi dedusă, de asemenea, din teorema energiei cinetice în mişcarea faţă de centrul maselor (13.19), sau din relaţia (14.15).

2° In cazul oscilaţiilor mici, mişcarea barei AB în jurul axei $P^*\xi$ are aceeaşi frecvenţă cu oscilaţia proiecţiei lui P^* pe axa $\Omega\xi_1$.

286. Să se studieze mişcarea unei bare rectilinii, rigide, grele în vid.

Rezolvare. Deoarece forţele externe se reduc la greutatea totală a barei aplicată în centrul său de masă, din teorema mişcării centrului de masă deducem că punctul P^* (centrul de masă al barei) se mişcă, ca un punct material greu, pe o parabolă situată într-un plan vertical fix.

Mişcarea centrului de masă fiind astfel cunoscută, rămîne să studiem mişcarea barei în jurul centrului său de masă.

In acest scop vom aplica teorema momentului cinetic în mişcarea faţă de centrul maselor (v. formula (13.12)). Cum $\overline{\mathcal{M}}^* = 0$, rezultă că momentul cinetic faţă de centrul de masă este un

vector constant. Fixăm un sens pozitiv pe bară prin versorul $\bar{u}$ şi notăm cu λ abscisa unui punct P al barei faţă de punctul P^*. Dacă notăm cu 2a lungimea barei avem

$$(1) \qquad \bar{K}^* = \int_{-a}^{a} (\bar{u} \times \dot{\bar{u}}) \lambda^2 dm = I^* (\bar{u} \times \dot{\bar{u}}) ,$$

unde I^* este momentul de inerţie al barei faţă de punctul P^*.

Prin urmare, obţinem

$$(2) \qquad \bar{u} \times \dot{\bar{u}} = \bar{C} ,$$

în care $\bar{C}$ este un vector constant.

Din relaţia (2) deducem că $\bar{u}$ este paralel cu un plan fix (care este normal vectorului $\bar{C}$) în tot timpul mişcării. Astfel, bara dată se mişcă în jurul centrului său de masă P^*, rămînînd cuprinsă mereu într-un plan care trece prin $\bar{P}^*$ şi a cărui direcţie este fixă în spaţiu. Notînd cu θ unghiul barei cu o direcţie fixă din planul mişcării deducem că

$$(3) \qquad |\bar{u} \times \dot{\bar{u}}| = \dot{\theta} = \text{const.},$$

deci, bara are o rotaţie uniformă, în jurul centrului său de masă, într-un plan de direcţie fixă în spaţiu.

287. Să se studieze mişcarea unui lanţ neomogen greu, de densitate dată, care alunecă fără frecare pe o curbă fixă dată.

Rezolvare. Fie (C) curba pe care se mişcă lanţul dat, A şi B extremităţile lanţului şi a lungimea sa. Luăm un reper fix $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ cu originea într-un punct al curbei (C), cu axa $\Omega\xi_3$ verticală descendentă, iar planul $\xi_1\Omega\xi_2$ orizontal. Notăm cu σ arcul curbei (C) măsurat de la punctul fix Ω pînă la un punct al curbei de cotă ξ_3. Curba (C) fiind dată, putem întotdeauna să exprimăm pe ξ_3 în funcţie de σ ,

$$(1) \qquad \xi_3 = \varphi(\sigma) , \quad \varphi(\sigma) \in C^1 .$$

In particular, notăm cu s arcul ΩA, măsurat de la punctul

Ω pe curba (1) pînă la extremitatea A a lanţului şi socotit pozitiv de la B la A. Poziţia lanţului pe curbă este cunoscută dacă se cunoaşte parametrul s . Prin urmare, un lanţ mobil pe o curbă formează un sistem mecanic cu legături complete, adică un sistem mecanic cu un singur grad de libertate. Lanţul fiind presupus inextensibil trebuie considerat ca un fir format din puncte materiale legate astfel încît unul oarecare dintre ele este la o distanţă constantă de cel care îl precede şi de cel care îl urmează.

De asemenea, notăm cu λ arcul AP măsurat de la extremitatea A pînă la punctul P al lanţului şi cu $f(\lambda)$ densitatea în punctul P al lanţului presupusă cunoscută. Coordonata ξ_3 a punctului P este atunci

$$\xi_3 = \varphi(s-\lambda) , \tag{2}$$

iar masa totală a sistemului este

$$M = \int_0^a dm = \int_0^a f(\lambda)d\lambda . \tag{3}$$

Asupra lanţului AB acţionează greutatea totală a sa $Mg\bar{\xi}_3$, aplicată în centrul său de masă P^* (forţă dată), reacţiunile normale ale curbei (forţe de legătură externe) şi acţiunile mutuale dintre două puncte consecutive (forţe de legătură interne).

Ecuaţia de mişcare a lanţului se poate obţine din teorema energiei cinetice exprimată prin (13.13) sau (14.14).

Pentru calcularea energiei cinetice totale facem observaţia că în mişcarea lanţului, la un moment dat, mărimile vitezelor tuturor punctelor sînt egale cu $\dot{s}$, prin urmare

$$E = \frac{1}{2}\int_0^a v^2 dm = \frac{M}{2}\dot{s}^2 . \tag{4}$$

Pe de altă parte, puterea forţelor interne este nulă, deoarece distanţa dintre două puncte vecine ale lanţului este invariabilă, puterea forţelor de legătură externe este nulă, fiindcă acestea sînt normale deplasărilor punctelor, iar puterea forţelor de masă externe (greutăţile punctelor) este

$$\mathcal{P} = \int_0^a \bar{v}\bar{g}\,dm = g\int_0^a \dot{\xi}_3 f(\lambda)\,d\lambda \quad . \tag{5}$$

Curba pe care se mişcă lanţul poate fi formată din mai multe părţi distincte din punct de vedere geometric. In continuare vom considera două cazuri reprezentative şi anume, cazul în care lanţul se mişcă în întregime pe o curbă (C) (v.fig.27) şi cazul în care lanţul este întins pe axa orizontală $\Omega\xi_1$, extremitatea A părăseşte dreapta şi alunecă de-a lungul unei curbe (C) (v. fig.28).

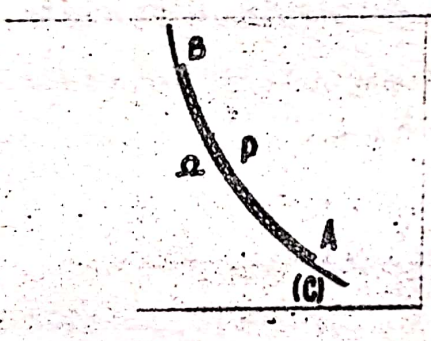

Fig.27

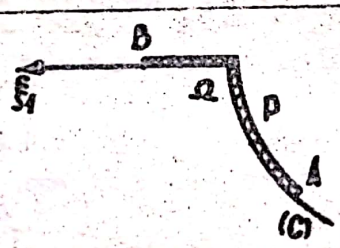

Fig.28

i) In primul caz (v. fig.27) din (2) deducem

$$\dot{\xi}_3 = \varphi'(s-\lambda)\dot{s} \ ,$$

deci, avem

$$\mathcal{P} = g\dot{s}\int_0^a \varphi'(s-\lambda)f(\lambda)\,d\lambda \quad . \tag{6}$$

Astfel, teorema energiei cinetice conduce la ecuaţia mişcării

$$M\ddot{s} = g\int_0^a \varphi'(s-\lambda)f(\lambda)\,d\lambda \quad . \tag{7}$$

Forma acestei ecuaţii ne arată că putem obţine pe t în funcţie de s prin două cuadraturi. Ecuaţia (7) este analogă cu aceea a

mişcării rectilinii a unui punct material sub acţiunea unei forţe care depinde numai de poziţie.

Dacă presupunem că lungimea lanţului tinde la zero, avem

$$\lim_{a\to 0} \frac{\int_0^a \varphi'(s-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^a f(\lambda)\, d\lambda} = \varphi'(s)$$

şi relaţia (7) se reduce la

$$\ddot{s} = g\,\varphi'(s)\ , \tag{8}$$

care este ecuaţia de mişcare a unui punct material greu pe o curbă fixă.

Ne punem acum problema de a vedea în ce caz ecuaţia (7) este independentă de lungimea lanţului, cu alte cuvinte, care este forma curbei (C) pentru care fiecare punct al lanţului se deplasează ca un punct material greu izolat pe curbă. Prin urmare, trebuie să avem

$$\int_0^a \varphi'(s-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = \psi(s) \int_0^a f(\lambda)\, d\lambda\ ,$$

de unde, prin derivare în raport cu a, obţinem

$$\varphi'(s-a) = \psi(s)\ .$$

După o nouă derivare în raport cu a găsim

$$\varphi''(s-a) = 0\ ,$$

oricare ar fi s şi a, deci

$$\varphi(s) = \alpha(s-s_0)\ ,\quad \alpha, s_0 = \text{const.}, \tag{9}$$

ecuaţie ce caracterizează o elice situată pe un cilindru vertical. In acest caz ecuaţia (7) devine

$$\ddot{s} = \alpha g\ .$$

Dacă lanţul este omogen, adică $f(\lambda) = \rho = \text{const.}$, avem $M = a\rho$ şi ecuaţia (7) se reduce la

(10) $$\ddot{s} = g\,\frac{\varphi(s-a) - \varphi(s)}{a}\,.$$

Ecuaţia (10) se poate scrie sub o formă simetrică. In acest scop, schimbăm pe s în $s + \frac{a}{2}$, ceea ce revine la a nota cu s arcul ΩP^*. Se găseşte

(10') $$\ddot{s} = -g\,\frac{\varphi(s+\frac{a}{2}) - \varphi(s-\frac{a}{2})}{a}\,.$$

Din (10') deducem că mişcarea mijlocului lanţului nu depinde de lungimea sa, adică mijlocul lanţului se deplasează ca un punct material greu izolat pe o curbă fixă, dacă şi numai dacă lanţul se mişcă pe o elice, caracterizată de ecuaţia (9), sau pe o cicloidă pentru care avem

(11) $\varphi(s) = k(s-s_0)^2 + C$, $k, s_0, C = \text{const.}$

In adevăr, trebuie să avem

$$\varphi(s + \tfrac{a}{2}) - \varphi(s - \tfrac{a}{2}) = a\psi(s)\,,$$

de unde, derivînd de două ori în raport cu a, găsim

$$\varphi''(s + \tfrac{a}{2}) = \varphi''(s - \tfrac{a}{2})\,,$$

oricare ar fi s şi a. Rezultă că $\varphi''(s) = k = \text{const.}$ şi obţinem (9) sau (11), după cum avem $k = 0$ sau $k \neq 0$. Proprietatea inversă se verifică uşor.

ii) In cazul al doilea (v.fig.28), avem

(12) $$\dot{\xi}_3 = \begin{cases} 0\,, & \text{pe segmentul } B\Omega\,, \\ \dot{s}\,\varphi'(s-\lambda)\,, & \text{pe arcul } \Omega A\,, \end{cases}$$

prin urmare, deducem

(13) $$\mathcal{P} = g\dot{s}\int_0^s \varphi'(s-\lambda)f(\lambda)\,d\lambda\,.$$

Astfel, ecuaţia de mişcare a lanţului pe porţiunea $B\Omega$ este

(14) $$\ddot{s} = 0\,,$$

iar pe porţiunea ΩA are forma

$$(15) \qquad M\ddot{s} = g\int_0^s \varphi'(s-\lambda)f(\lambda)d\lambda \ .$$

In cazul în care lanţul este omogen ecuaţia (15) se reduce la

$$(16) \qquad \ddot{s} = -g\frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{a} \ .$$

Pentru determinarea tensiunii lanţului aplicăm teorema energiei cinetice porţiunii AP din lanţ. Prin separarea acestei porţiuni de restul lanţului, în punctul P se aplică tensiunea necunoscută $\bar{T}$, tangentă la curba (C). Se găseşte

$$\ddot{s}\int_0^\lambda f(u)du = g\int_0^\lambda \varphi'(s-u)f(u)du + T \ ,$$

de unde

$$(17) \qquad T = \ddot{s}\int_0^\lambda f(u)du - g\int_0^\lambda \varphi'(s-u)f(u)du \ .$$

In ecuaţia (17) trebuie să înlocuim pe s cu valoarea corespunzătoare din (7), sau din (14), sau din (15).

Dacă aplicăm formula (17) în cazul elicei, vedem imediat că T este egal cu zero, fapt care era de prevăzut, deoarece în acest caz punctele lanţului se deplasează ca şi cum ar fi izolate între ele. Se poate întîmpla ca pentru T să rezulte o valoare negativă. In acest caz un element al lanţului suferă o presiune şi nu o tensiune. Pentru ca mişcarea să fie posibilă în toate cazurile, trebuie să presupunem că lanţul este format dintr-un şirag de sfere mici înşirate pe un fir flexibil şi alunecînd într-un tub de aceeaşi rază. Atunci, dacă T este pozitiv într-un punct, firul este întins, iar dacă T este negativ, sferele contigue apasă una asupra alteia.

Rezultanta $\bar{L}$ a forţelor de legătură externe se poate determina din teorema mişcării centrului de masă, de unde obţinem

$$\bar{L} = M(\ddot{\bar{\Omega}}\bar{P}^* - \bar{g}) .$$

288. Să se afle densitatea într-un punct al unui lanț neomogen greu care alunecă, fără frecare, pe o curbă fixă dată după o lege cunoscută.

Rezolvare. Această problemă a fost studiată de către Alexandru Myller[1], care a fost condus la o interesantă aplicație a teoriei ecuațiilor integrale. Problema de față este inversa problemei precedente, în care s-au dat curba purtătoare a lanțului și legea de variație a densității acestuia, iar mișcarea s-a determinat cu ajutorul unei ecuații diferențiale de ordinul doi. După cum vom vedea în continuare, problema lui Myller se reduce la studiul unei ecuații integrale liniare de tip Fredholm sau de tip Volterra, în funcție de condițiile date ale problemei.

In cazul de față mișcarea lanțului este dată, iar funcția f(s) este necunoscută. Faptul că mișcarea este dată îl putem caracteriza dînd pe s în funcție de t sau,încă, presupunînd accelerația $\ddot{s}$ ca o funcție cunoscută de s, adică avem

$$\ddot{s} = F(s) , \tag{1}$$

în care F(s) este o funcție continuă dată.

De asemenea, vom considera încă două probleme înrudite cu aceasta care corespund unor legături între accelerația $\ddot{s}$ și densitatea f(s), însă mișcarea nu mai este presupusă cunoscută. Astfel, mai întîi vom considera cazul în care accelerația lanțului $\ddot{s}$ și densitatea sa f(s) sînt proporționale,deci

---

1) A. Myller, Sur le mouvement d'une chaîne pesante sur une courbe fixe, Scrieri matematice,Editura Academiei,București, 1959, p.137-143, sau, Nouvelles Annalles de Mathématique,4^e serie, t.IX, juillet 1909.

(2) $k\ddot{s} = f(s)$, $k = \text{const.}$

şi apoi cazul cînd diferenţa dintre acceleraţia mişcării $\ddot{s}$ şi densitatea necunoscută $f(s)$ este o funcţie continuă dată $F(s)$, adică

(3) $$\ddot{s} - f(s) = F(s) .$$

Considerăm cele două cazuri corespunzătoare figurilor 27 şi 28.

i) In primul caz (v.fig.27) legea mişcării lanţului este dată de ecuaţia (7) de la problema 287, deci, avînd în vedere condiţia (1), obţinem

(4) $$\int_0^a \varphi'(s-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = \frac{M}{g} F(s) ,$$

care este o ecuaţie integrală Fredholm de specia I.

Astfel, problema relativă la determinarea densităţii în acest caz este posibilă numai atunci cînd ecuaţia (4) admite o soluţie. După cum se ştie, existenţa soluţiei ecuaţiei (4) nu este asigurată în cazul general, ea depinzînd de forma funcţiilor $\varphi(s)$ şi $F(s)$. In unele cazuri speciale putem şti precis cum stau lucrurile. De exemplu, pentru mişcarea pe cicloida

(5) $$\xi_3 = \frac{s^2}{8R} , \quad R = \text{const.}, \quad \xi_2 = 0 ,$$

ecuaţia (4) devine

(6) $$\int_0^a (s-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = \frac{4RM}{g} F(s) .$$

Primul membru al acestei egalităţi fiind, pentru orice $f(\lambda)$, o funcţie liniară de s , rezultă că tot la fel trebuie să fie şi $F(s)$. Problema pusă nu este deci posibilă decît atunci cînd

(7) $$F(s) = As + B , \quad A, B = \text{const.}$$

Dacă este satisfăcută condiţia (7), problema admite o infinitate de soluţii. In adevăr, să căutăm soluţia ecuaţiei (6) sub forma

(8) $$f(\lambda) = \sum_{0}^{n} a_k \lambda^k \quad , \quad (n > 1) \, .$$

Din egalităţile (6),(7) şi (8) deducem două ecuaţii, din care putem determina doi dintre coeficienţii a_k, iar ceilalţi n-1 rămîn arbitrari.

Să presupunem acum că are loc relaţia (2). Se obţine

(9) $$f(s) - k \frac{\varepsilon}{|M|} \int_0^a \varphi'(s-\lambda) f(\lambda) d\lambda = 0 \, ,$$

care este o ecuaţie integrală Fredholm de specia II omogenă. Se ştie că ecuaţia (9) admite o soluţie reală, diferită de zero, numai atunci cînd factorul k este o valoare proprie a nucleului $\frac{\varepsilon}{|M|} \varphi'(s-\lambda)$.

Drept exemplu să luăm mişcarea pe tractrice a

(10) $$\xi_3 = ae^{s/a} \quad , \quad \xi_2 = 0 \, .$$

Ecuaţia problemei este

(11) $$f(s) = k \frac{\varepsilon}{|M|} \int_0^a e^{\frac{s-\lambda}{a}} f(\lambda) d\lambda \, ,$$

care admite, după cum se verifică imediat, pentru $k = \frac{M}{ag}$, soluţia

(12) $$f(s) = e^{s/a} \, .$$

Dacă acceptăm condiţia (3), atunci se găseşte

(13) $$f(s) - \frac{\varepsilon}{|M|} \int_0^a \varphi'(s-\lambda) f(\lambda) d\lambda + F(s) = 0 \, ,$$

deci, avem o ecuaţie integrală Fredholm de specia II neomogenă. Ecuaţia (13) admite în general o soluţie, cu excepţia cazului în care $k = 1$ este o valoare proprie pentru ecuaţia omogenă (11) şi prin urmare, ecuaţia (13) nu are soluţie.

ii) In cazul al doilea (v.fig.28) legea mişcării lanţului este dată de ecuaţia (15) de la problema 287, astfel încît relaţia (1) conduce la

$$(14)\qquad \int_0^s \varphi'(s-\lambda)f(\lambda)\,d\lambda = \frac{M}{g}F(s)\ ,$$

care este o ecuaţie integrală Volterra de specia I. In condiţiile noastre ecuaţia (14) admite o soluţie, prin urmare, este posibil să găsim o distribuţie a densităţii $f(\lambda)$ astfel încît lanţul să aibă o mişcare dată.

Să ne ocupăm acum de cîteva cazuri particulare pentru care soluţia ecuaţiei (14) se găseşte uşor.

α) Presupunem că (C) este cicloida (5). Ecuaţia (14) devine

$$\int_0^s (s-\lambda)f(\lambda)\,d\lambda = \frac{4RM}{g}F(s)\ .$$

Derivînd această egalitate de două ori în raport cu s obţinem soluţia

$$f(s) = \frac{4RM}{g}F''(s)\ .$$

β) Curba (C) este parabola semicubică

$$(15)\qquad \xi_3 = k\xi_1^{2/3}\ ,\quad k = \text{const.},\quad \xi_2 = 0\ ,$$

a cărei ecuaţie se scrie încă sub forma

$$(15')\qquad \xi_3 = ks^{2/3} - \frac{4k^2}{9}\ .$$

Ecuaţia (14) se reduce la

$$(16)\qquad \int_0^s \frac{f(\lambda)}{\sqrt[3]{s-\lambda}}\,d\lambda = \frac{3M}{2kg}F(s)\ ,$$

care este o ecuaţie integrală de tip Abel (v. şi problema 197) şi are soluţia [1]

$$(17)\qquad f(s) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{M}{gk\pi}\frac{d}{ds}\int_0^s \frac{F(\lambda)}{\sqrt[3]{(s-\lambda)^2}}\,d\lambda =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{M}{gk\pi}\left[\frac{F(0)}{s^{2/3}} + \int_0^s \frac{F(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt[3]{(s-\lambda)^2}}\right].$$

---

1) v. C. Corduneanu, Ecuaţii diferenţiale şi integrale, Univ. "Al.I.Cuza", Iaşi, 1971.

γ) Curba (C) este astroida

$$\xi_1^{2/3} + \xi_3^{2/2} = a^{2/3}, \quad \xi_2 = 0, \tag{18}$$

a cărei ecuaţie se scrie încă sub forma

$$\xi_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3a}} s^{3/2}. \tag{18'}$$

Ecuaţia (14) devine

$$\int_0^s \sqrt{s-\lambda}\, f(\lambda)d\lambda = \frac{M\sqrt{3a}}{\sqrt{2g}} F(s). \tag{19}$$

Derivînd în raport cu s ecuaţia (19), obţinem

$$\int_0^s \frac{f(\lambda)}{\sqrt{s-\lambda}}\, d\lambda = \frac{\sqrt{6a}}{g} MF'(s). \tag{20}$$

Aceasta este o ecuaţie integrală de tip Abel a cărei soluţie este (v. problema 197)

$$f(s) = \frac{\sqrt{6a}\, M}{\pi g}\left[F'(0) + \int_0^s \frac{F''(\lambda)}{\sqrt{s-\lambda}}\, d\lambda\right]. \tag{21}$$

δ) Curba (C) este tractricea

$$\xi_1 = \frac{a}{2} \ln \frac{a+\sqrt{a^2-\xi_3^2}}{a-\sqrt{a^2-\xi_3^2}} - \sqrt{a^2-\xi_3^2}, \quad \xi_2 = 0, \tag{22}$$

a cărui ecuaţie poate fi scrisă sub forma (10).

In acest caz ecuaţia (14) conduce la

$$\int_0^s e^{\frac{\xi-\lambda}{a}} f(\lambda)d\lambda = \frac{M}{g} F(s), \tag{23}$$

sau

$$\int_0^s e^{\frac{\lambda}{a}} f(\lambda)d\lambda = \frac{M}{g} e^{\frac{s}{a}} F(s). \tag{23'}$$

Prin derivare se obţine soluţia

$$f(s) = \frac{M}{g}\left[F'(s) - \frac{1}{a} F(s)\right]. \tag{24}$$

Dacă presupunem că are loc relaţia (2), se ajunge la

$$f(s) - k\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma} \int_0^s \varphi'(s-\lambda) f(\lambda)d\lambda = 0, \tag{25}$$

care este o ecuaţie integrală omogenă de specia II, de tip Volterra, care admite numai soluţia banală, deci problema pusă este imposibilă.

In sfîrşit, dacă adoptăm condiţia (3), obţinem

$$(26) \qquad f(s) - \frac{g}{M}\int_0^s \varphi'(s-\lambda)f(\lambda)d\lambda + F(s) = 0 .$$

Aceasta este o ecuaţie integrală de specia II neomogenă, de tip Volterra, care în ipotezele făcute asupra lui $\varphi(s)$ şi $F(s)$ admite o soluţie şi numai una.

Observaţii. 1° Dintre soluţiile $f(s)$ ale ecuaţiilor integrale de mai sus, numai acelea pozitive pot reprezenta densitatea, deci sînt acceptabile.

2° Condiţiile (1)-(3) pot fi cuprinse într-o singură formulă şi anume

$$(27) \qquad \ddot{s} = \frac{1}{k} f(s) + F(s) ,$$

unde k este un coeficient constant. In adevăr, pentru $\frac{1}{k} = 0$ avem condiţia (1), dacă $F(s) = 0$ găsim relaţia (2), iar pentru $k = 1$ rezultă formula (3).

282. Să se studieze mişcarea unui cilindru circular omogen, de rază r, care se rostogoleşte fără alunecare înăuntrul unui cilindru circular gol, de rază $R(R > r)$, fixat într-o poziţie orizontală.

Rezolvare. Mişcarea cilindrului de rază r, în interiorul suprafeţei cilindrice de rază R, este o mişcare plan-paralelă a unui rigid. Considerăm intersecţia celor doi cilindri cu un plan $\xi_1 O \xi_2$ care este normal direcţiei axelor lor. Astfel, problema se reduce la studiul mişcării unui disc circular omogen, care se rostogoleşte fără alunecare pe partea interioară a unui cerc vertical fix. Această problemă prezintă oarecare

analogie cu problema 283. Luăm originea Ω în centrul cercului fix, axa $\Omega\xi_1$ verticală descendentă, axa $\Omega\xi_2$ orizontală şi notăm cu O centrul discului mobil (v.fig.29). Acest sistem mecanic are un singur grad de libertate. Fie θ unghiul (orientat în sens direct) pe care îl face vectorul $\overrightarrow{\Omega O}$ cu axa $\Omega\xi_1$. Pentru a exprima rostogolirea discului considerăm unghiul φ, orientat în sens invers, pe care îl face vectorul $\overrightarrow{OC}$ (unde C este punctul de contact al celor două cercuri) cu raza $\overrightarrow{OB}$ solidară cu discul şi care coincide cu $\overrightarrow{OA}$ când θ este egal cu zero. Pentru a determina o relaţie între φ şi θ observăm că, pentru rostogolire fără alunecare, arcul CB al cercului mic este egal cu arcul AC al cercului mare. Deoarece

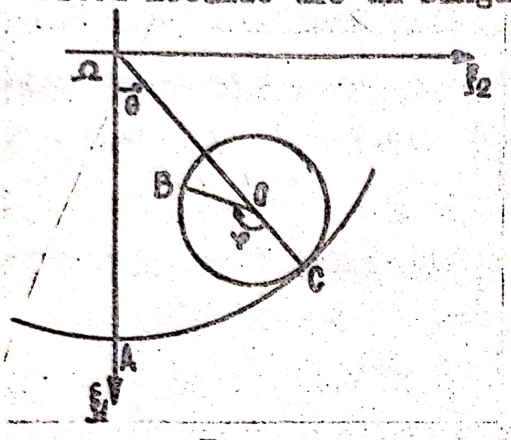

Fig.29

$$\text{arc } CB = r\varphi \ , \quad \text{arc } AC = R\theta \ ,$$

avem

(1) $$\varphi = \frac{R}{r}\theta \ .$$

Dacă luăm reperul x_1Ox_2 solidar cu discul astfel încît axa Ox_1 să fie colinieră cu vectorul $\overrightarrow{OB}$ şi orientat la fel cu reperul fix, avem

$$\bar{e}_1 = \bar{\varepsilon}_1\cos(\theta-\varphi) - \bar{\varepsilon}_2\sin(\theta-\varphi), \quad \bar{e}_2 = -\bar{\varepsilon}_1\sin(\theta-\varphi) - \bar{\varepsilon}_2\cos(\theta-\varphi),$$

prin urmare, pentru vectorul de rotaţie momentană găsim

(2) $$\bar{\omega} = \dot{\bar{e}}_1\bar{e}_2 = \dot{\theta} - \dot{\varphi} = (1-\frac{R}{r})\dot{\theta} \ , \quad \bar{\omega} = (1-\frac{R}{r})\dot{\theta}\,\bar{\varepsilon}_3 \ .$$

Forţele care acţionează asupra discului sînt greutatea sa $M\bar{g}$, unde M este masa discului, aplicată în centrul O şi forţa de legătură $\bar{L}$ aplicată în punctul C (frecarea de rostogolire o neglijăm).

Legea mişcării discului se poate afla din teorema energiei cinetice. Pentru a calcula energia cinetică a discului putem utiliza teorema lui König. Vectorul de poziţie al centrului de masă al discului este

$$(3) \qquad \bar{\rho}_0 = \overline{\Omega O} = (R-r)(\bar{\varepsilon}_1 \cos\theta + \bar{\varepsilon}_2 \sin\theta) .$$

Astfel, viteza centrului de masă are expresia

$$(4) \qquad \bar{v}_0 = (R-r)\dot{\theta}(-\bar{\varepsilon}_1 \sin\theta + \bar{\varepsilon}_2 \cos\theta) ,$$

iar energia cinetică a centrului de masă dotat cu masa M este $\frac{1}{2} M(R-r)^2 \dot{\theta}^2$. Pe de altă parte, energia cinetică a discului faţă de centrul său este

$$E^* = \frac{1}{4} M(R-r)^2 \dot{\theta}^2 ,$$

prin urmare, energia cinetică totală a discului este dată de

$$(5) \qquad E = \frac{3}{4} M(R-r)^2 \dot{\theta}^2 .$$

Lucrul mecanic elementar al forţelor care acţionează asupra discului se poate calcula după formula (14.9). Avem

$$\bar{\mathcal{R}} = Mg\,\bar{\varepsilon}_1 + L_1\,\bar{\varepsilon}_1 + L_2\,\bar{\varepsilon}_2, \quad \bar{\mathcal{M}} = \overline{OC} \times \bar{L} = r(L_2 \cos\theta - L_1 \sin\theta)\,\bar{\varepsilon}_3 ,$$

de unde

$$(6) \qquad d\mathcal{L} = -(R-r)Mg\,dt\,\dot{\theta}\sin\theta ,$$

astfel încît teorema energiei cinetice conduce la ecuaţia

$$(7) \qquad \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)} \sin\theta = 0 ,$$

care este de tipul ecuaţiei unui pendul simplu de lungime $\frac{3}{2}(R-r)$.

Din (7) deducem integrala primă

$$(8) \qquad \dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3(R-r)}(\cos\theta + h) , \quad h = \text{const.}$$

Pentru a determina forţa de legătură $\bar{L}$ folosim teorema mişcării centrului de masă (14.11). Avem

$$(9) \quad (R-r)\left[\ddot{\theta}(-\bar{\varepsilon}_1 \sin\theta + \bar{\varepsilon}_2 \cos\theta - \dot{\theta}^2(\bar{\varepsilon}_1 \cos\theta + \bar{\varepsilon}_2 \sin\theta)\right] = Mg\,\bar{\varepsilon}_1 + \bar{L} .$$

Dacă ţinem seama de ecuaţiile (7) şi (8) deducem

(10) $\bar{L}=-Mg\,\bar{\varepsilon}_1+\frac{2g}{3}\left[(1-2h\cos\theta-3\cos^2\theta)\bar{\varepsilon}_1-(2h+3\cos\theta)\bar{\varepsilon}_2\sin\theta\right]$.

Observaţie. Ecuaţia (7) poate fi obţinută şi din teorema momentului cinetic în raport cu reperul fix. Momentul cinetic total faţă de punctul Ω se poate calcula după teorema lui König sau după formula (14.6) Astfel avem

(11) $$\bar{K}=\frac{1}{2}M(R-r)(2R-3r)\dot{\theta}\,\bar{\varepsilon}_3 .$$

Momentul rezultant al forţelor externe faţă de punctul Ω este

(12) $\bar{\mathcal{M}}_\Omega=-Mg(R-r)\bar{\varepsilon}_3\sin\theta+R(\bar{\varepsilon}_1\cos\theta+\bar{\varepsilon}_2\sin\theta)\times\bar{L}$,

prin urmare, rezultă

(13) $\frac{1}{2}M(R-r)(2R-3r)\ddot{\theta}\,\bar{\varepsilon}_3=-Mg(R-r)\bar{\varepsilon}_3\sin\theta+R(\bar{\varepsilon}_1\cos\theta+\bar{\varepsilon}_2\sin\theta)\times\bar{L}$.

Dacă eliminăm pe $\bar{L}$ din ecuaţiile (9) şi (13) găsim relaţia (7).

290. Un paralelogram articulat cu laturile $\overline{AB}=\overline{CD}=2a$ şi $\overline{BC}=\overline{DA}=2b$ se mişcă într-un plan vertical în jurul unui punct fix O situat la mijlocul laturii AB. Presupunînd că laturile AB şi CD sînt bare rigide, grele şi omogene, de aceeaşi masă m_1, să se studieze mişcarea sistemului în următoarele două cazuri :

1° Laturile BC şi DA sînt fixe, rigide şi fără masă.

2° Laturile BC şi DA sînt bare rigide, grele şi omogene, de aceeaşi masă m_2.

Rezolvare. Luăm un reper $\xi_1 O \xi_2$ cu originea în punctul O, axa $O\xi_1$ verticală descendentă şi axa $O\xi_2$ orizontală. Paralelogramul dat fiind articulat nu constituie un sistem rigid. Avem un sistem mecanic cu două grade de libertate. Poziţia paralelogramului se determină, deci, cu ajutorul a doi parametri. Fie θ unghiul dreptei OO', care uneşte mijloacele

laturilor AB şi CD, cu axa $O\xi_1$ şi φ unghiul pe care îl face OA cu verticala $O\xi_1$ (v.fig.30). Dacă luăm reperul x_1Ox_2 cu axa Ox_1 coliniară cu vectorul $\overrightarrow{OA}$ şi la fel orientat cu reperul fix, avem

$$\bar{e}_1 = \bar{\varepsilon}_1\cos\varphi + \bar{\varepsilon}_2\sin\varphi ,$$
$$\bar{e}_2 = -\bar{\varepsilon}_1\sin\varphi + \bar{\varepsilon}_2\cos\varphi .$$

Astfel, pentru rotaţia momentană, deducem

(1) $\omega = \dot{\bar{e}}_1\bar{e}_2 = \dot{\varphi}$, $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{\varepsilon}_3$.

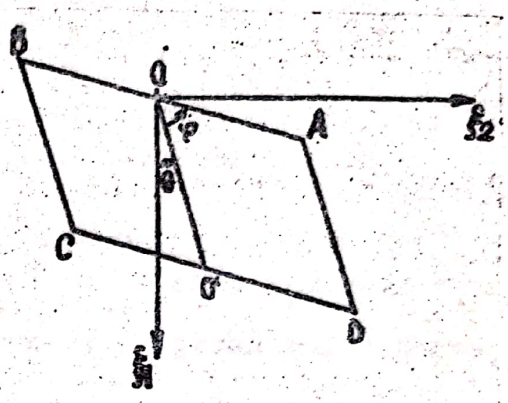

Fig.30

1° In acest caz forţele care acţionează asupra sistemului sînt greutăţile barelor AB şi CD, egale fiecare cu $m_1\bar{g}$ şi aplicate în punctele O şi O', reacţiunea $\bar{L}$ a punctului O şi tensiunile $\bar{T}, \bar{T}'$ ale firelor aplicate respectiv în punctele A,B şi coliniare prima cu $\overrightarrow{AD}$, iar a doua cu $\overrightarrow{BC}$. In punctele D şi C acţionează respectiv forţele $-\bar{T}$ şi $-\bar{T}'$.

Pentru aflarea legii mişcării avem nevoie de două ecuaţii diferenţiale independente de forţele de legătură $\bar{L}, \bar{T}$ şi $\bar{T}'$. Aceste ecuaţii vor fi date de teorema energiei cinetice şi de teorema momentului cinetic.

Energia cinetică a barei AB este

(2) $$E_{AB} = \frac{m_1}{6} a^2\dot{\varphi}^2 ,$$

iar aceea a barei CD, după teorema lui Konig, are expresia

(3) $$E_{CD} = \frac{m_1}{2}\left(4b^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{3}a^2\dot{\varphi}^2\right) .$$

Pe de altă parte, lucrul mecanic elementar al tensiunilor firelor este nul deoarece acestea sînt rigide, lucrul mecanic al greutăţii barei AB şi al forţei de legătură $\bar{L}$ sînt nule fiindcă O este fix, iar lucrul mecanic elementar al greutăţii barei CD este

(4) $$d\mathcal{L}_{CD} = -2m_1 bg \sin\theta \, d\theta \ .$$

Prin urmare, teorema energiei cinetice conduce la

(5) $$2b^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{3}a^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -bg\dot{\theta}\sin\theta \ ,$$

sau

(5') $$b^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}a^2\dot{\varphi}^2 = bg\cos\theta + \text{const.}$$

In mod analog, momentul cinetic al barei AB este

(6) $$\bar{K}_{AB} = \frac{1}{3}m_1 a^2 \dot{\varphi}\bar{\varepsilon}_3 \ ,$$

iar momentul cinetic al barei CD faţă de punctul O, conform teormei lui König, are expresia

(7) $$\bar{K}_{CD} = m_1(4b^2\dot{\theta} + \frac{a^2}{3}\dot{\varphi})\bar{\varepsilon}_3 \ .$$

Momentul rezultant al forţelor aplicate sistemului se reduce la momentul în raport cu punctul O al greutăţii barei CD

(8) $$\bar{\mathcal{M}}_{CD} = -2bm_1 g\,\bar{\varepsilon}_3 \sin\theta \ .$$

Astfel, teorema momentului cinetic total dă

(9) $$2b^2\ddot{\theta} + \frac{1}{3}a^2\ddot{\varphi} = -bg\sin\theta \ .$$

Eliminînd pe $\ddot{\theta}$ din ecuaţiile (5) şi (9), obţinem

(10) $$(\dot{\varphi} - \dot{\theta})\ddot{\varphi} = 0 \ .$$

Cum diferenţa $\dot{\varphi} - \dot{\theta}$ nu poate fi nulă în tot timpul mişcării, deoarece la momentul iniţial are o valoare arbitrară, rezultă $\ddot{\varphi} = 0$, deci bara AB se roteşte uniform în jurul punctului O. Ecuaţia (9) dă atunci

(11) $$\ddot{\theta} + \frac{g}{2b}\sin\theta = 0 \ ,$$

care este ecuaţia de mişcare a unui pendul simplu. Punctul O' se mişcă, aşadar, ca şi cum restul barei CD nu ar exista şi el ar fi legat direct de punctul O printr-un fir fără masă.

Pentru a calcula forţele de legătură aplicăm, mai întîi, barei AB teorema momentului cinetic. Deoarece din cele ce preced rezultă că momentul cinetic al barei AB este un vector constant, deducem

$$\vec{OA} \times \bar{T} + \vec{OB} \times \bar{T}' = 0 ,$$

sau

$$\vec{OA} \times (\bar{T} - \bar{T}') = 0.$$

Avînd în vedere că $\bar{T} - \bar{T}'$ nu este coliniar cu $\vec{OA}$, din relaţia precedentă găsim $\bar{T} = \bar{T}'$.

Să aplicăm acum teorema mişcării centrului de masă barei CD . Mijlocul său O' se deplasează ca şi cum ar fi solicitat direct de greutatea $m_1\bar{g}$ a barei şi de tensiunile $-\bar{T}$ şi $-\bar{T}'$ transportate în acest punct. Avem

$$m_1 \ddot{\vec{OO'}} = m_1\bar{g} - 2\bar{T} ,$$

sau

$$(12)\quad 2\bar{T} = m_1\left[\bar{g} + 2b\dot{\theta}^2(\bar{\varepsilon}_1\cos\theta + \bar{\varepsilon}_2\sin\theta) - 2b\ddot{\theta}(-\bar{\varepsilon}_1\sin\theta + \bar{\varepsilon}_2\cos\theta)\right] .$$

Dacă avem în vedere relaţia (11) şi consecinţa sa

$$(11')\qquad \dot{\theta}^2 = \frac{g}{b}(\cos\theta + h), \quad h = \text{const.},$$

formula (12) devine

$$(12')\qquad \bar{T} = \frac{m_1 g}{2}(3\cos\theta + 2h)(\bar{\varepsilon}_1\cos\theta + \bar{\varepsilon}_2\sin\theta) ,$$

deci $-2\bar{T}$ este egală cu reacţiunea firului în mişcarea unui pendul simplu.

Cunoscînd atunci tensiunea $\bar{T}$, pentru determinarea reacţiunii punctului O utilizăm teorema mişcării centrului de m pentru bara AB. Deoarece punctul O este imobil, găsim

$$(13)\qquad \bar{L} = -2\bar{T} - m_1\bar{g} ,$$

prin urmare, forţele aplicate barei AB formează un sistem echivalent cu un cuplu.

2^0 Forţele care acţionează asupra sistemului sînt greutăţile celor patru bare aplicate în centrele lor de masă şi reacţiunea $\bar{L}$ a punctului O .

Fie E mijlocul laturii AD şi F mijlocul laturii BC. Avem

$$(14)\quad \begin{cases} \vec{OE} = a(\bar{\varepsilon}_1\cos\varphi + \bar{\varepsilon}_2\sin\varphi) + b(\bar{\varepsilon}_1\cos\theta + \bar{\varepsilon}_2\sin\theta) , \\ \vec{OF} = -a(\bar{\varepsilon}_1\cos\varphi + \bar{\varepsilon}_2\sin\varphi) + b(\bar{\varepsilon}_1\cos\theta + \bar{\varepsilon}_2\sin\theta) . \end{cases}$$

Utilizînd teorema lui König deducem că energia cinetică a barei AB are expresia

$$(15)\quad E_{AD} = \frac{m_2}{2}\left[a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}b^2\dot{\theta}^2 + ab\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\theta+\varphi)\right],$$

iar aceea a barei BC este

$$(16)\quad E_{BC} = \frac{m_2}{2}\left[a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}b^2\dot{\theta}^2 - ab\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\theta+\varphi)\right],$$

deci energia cinetică totală este

$$(17)\quad E = \frac{2b^2}{3}(3m_1 + 2m_2)\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{3}(m_1 + 3m_2)\dot{\varphi}^2 .$$

Lucrul mecanic elementar al forţelor care acţionează asupra sistemului se reduce la

$$(18)\quad d\mathcal{L} = -2bg(m_1 + m_2)\sin\theta\, d\theta ,$$

astfel încît teorema energiei cinetice totale dă

$$(19)\quad 2b^2(3+2k)\dot{\theta}\ddot{\theta} + a^2(1+3k)\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -3bg(1+k)\dot{\theta}\sin\theta ,$$

unde am notat $k = \frac{m_2}{m_1}$.

Pe de altă parte, după teorema lui König, momentul cinetic, în raport cu punctul O, al barei AB este

$$(20)\quad \bar{K}_{AD} = m_2\left[a^2\ddot{\varphi} + \frac{4}{3}b^2\ddot{\theta} + ab(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta})\cos(\theta-\varphi)\right]\bar{\varepsilon}_3 ,$$

iar acel al barei BC

$$(21)\quad \bar{K}_{BC} = m_2\left[a^2\ddot{\varphi} + \frac{4}{3}b^2\ddot{\theta} - ab(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta})\cos(\theta-\varphi)\right]\bar{\varepsilon}_3 ,$$

deci momentul cinetic total are expresia

$$(22)\quad \bar{K} = \left[\frac{4b^2}{3}(3m_1+2m_2)\ddot{\theta} + \frac{2a^2}{3}(m_1+3m_2)\ddot{\varphi}\right]\bar{\varepsilon}_3 .$$

Momentul rezultant al forţelor aplicate sistemului este

$$(23)\quad \bar{\mathcal{M}} = -2bg(m_1 + m_2)\bar{\varepsilon}_3\sin\theta .$$

Prin urmare, teorema momentului cinetic total conduce la

$$(24)\quad 2b^2(3+2k)\ddot{\theta} + a^2(1+3k)\ddot{\varphi} = -3bg(1+k)\sin\theta .$$

Dacă eliminăm pe $\ddot{\theta}$ din relaţiile (19) şi (24) obţinem egalitatea (10), deci avem $\ddot{\varphi} = 0$. Pentru θ se găseşte ecuaţia ...

(25) $$\ddot{\theta} + \frac{3g(1+k)}{2b(3+2k)} \sin\theta = 0 .$$

adică θ satisface ecuaţia unui pendul simplu.

Forţa de legătură $\bar{L}$ se determină din teorema mişcării centrului de masă al paralelogramului. Centrul de masă al sistemului coincide cu mijlocul segmentului OO', prin urmare, avem

$$(m_1 + m_2)\ddot{\overrightarrow{OO'}} = 2(m_1+m_2)\bar{g} + \bar{L} .$$

Ţinînd seama de relaţia (25) şi de consecinţa sa

(25') $$\dot{\theta}^2 = \frac{3g(1+k)}{b(3+2k)} (\cos\theta + h) , \quad h = \text{const.},$$

obţinem

(26) $$\bar{L} = - \frac{3g(1+k)(m_1+m_2)}{3+2k} (3\cos\theta + 2h)(\bar{\varepsilon}_1 \cos\theta + \bar{\varepsilon}_2 \sin\theta) - \frac{g(3+k)(m_1+m_2)}{3+2k} \bar{\varepsilon}_1 .$$

Observaţie. Rezultatele de la punctul 1^o al acestei probleme se pot deduce din acelea de la punctul 2^o punînd $m_2 = 0$.

291. Se consideră un paralelipiped dreptunghic greu şi omogen cu muchiile $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $c = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Să se studieze mişcarea sa în jurul unei diagonale, presupusă orizontală, a bazei care conţine muchiile b şi c.

Rezolvare. Acest paralelipiped rigid care se mişcă în jurul unei axe orizontale sub acţiunea greutăţii proprii reprezintă un pendul fizic sau pendul compus. Luăm un reper fix $O\xi_1\xi_2\xi_3$ a cărui axă $O\xi_3$ coincide cu axa de rotaţie a corpului, iar planul $\xi_1 O \xi_2$ este vertical şi trece prin centrul de masă P^* al paralelipipedului. Presupunem că axa $O\xi_1$ este verticală descendentă şi $O\xi_2$ orizontală. Considerăm un reper $Ox_1x_2x_3$ solidar cu rigidul, astfel încît axa Ox_3 să coincidă cu $O\xi_3$, iar Ox_1 să treacă prin centrul de masă P^*. Avem un sistem mecanic cu un singur grad de libertate.

Fie θ unghiul dintre axele Ox_1 și $O\xi_1$. Rezultă

(1) $\bar{\varepsilon}_1=\bar{e}_1\cos\theta-\bar{e}_2\sin\theta$, $\bar{\varepsilon}_2=\bar{e}_1\sin\theta+\bar{e}_2\cos\theta$, $\bar{r}^*=\frac{a}{2}\bar{e}_1$.

Singura forță externă dată este greutatea paralelipipedului egală cu $Mg\bar{\varepsilon}_1$ și aplicată în punctul P^*, unde am notat cu M masa rigidului.

Pentru studiul mișcării folosim ecuația (14.16). Componenta momentului greutății pe axa Ox_3 este

(2) $$\mathcal{M}_3 = Mg(\bar{r}^* \times \bar{\varepsilon}_1)\bar{e}_3 = -\frac{Mg}{2\sqrt{2}}\sin\theta \ .$$

Să calculăm acum momentul de inerție al corpului în raport cu axa Ox_3. In acest scop considerăm axa P^*x_3' care trece prin centrul de masă și este paralelă la Ox_3. Deoarece momentele principale de inerție au expresiile

$$I_{11}^* = \frac{M}{12}(b^2+c^2),\ I_{22}^* = \frac{M}{12}(c^2+a^2),\ I_{33}^* = \frac{M}{12}(a^2+b^2)\ ,$$

(v. formulele (7) de la problema 247), iar cosinusurile directoare ale axei P^*x_3' față de axele de simetrie ale paralelipipedului sînt $0, \pm\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}, \pm\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$, din formula (11.12) deducem că momentul de inerție față de P^*x_3' este

$$I_{33}' = \frac{M}{12(b^2+c^2)}\left[b^2(c^2+a^2)+c^2(a^2+b^2)\right] .$$

Prin urmare, după teorema lui Steiner, momentul de inerție față de axa Ox_3 are expresia

$$I_{33} = I_{33}' + \frac{M}{4}a^2 \ ,$$

sau, avînd în vedere valorile lui a,b și c

(3) $$I_{33} = \frac{31}{96}M \ .$$

Astfel ecuația de mișcare este

$$\ddot{\theta} + \frac{24\sqrt{2}}{31}g\sin\theta = 0 \ .$$

Rezultă că pendulului fizic reprezentat de paralelipipedul

dat este sincron cu un pendul simplu de lungime $\frac{31\sqrt{2}}{48}$.

Forţele de legătură $\bar{L}$ şi $\bar{L}'$ se determină din ecuaţiile (14.17).

292. Să se studieze mişcarea unui rigid cu un punct fix în cazul cînd momentul rezultant al forţelor exterme date şi momentul cinetic al său au aceeaşi direcţie şi raportul mărimilor constant , în tot timpul mişcării.

Rezolvare. Deoarece reperul $Ox_1x_2x_3$, solidar cu rigidul, este format din axe principale de inerţie, iar punctul O este fix, din (14.6) deducem

$$(1) \qquad \bar{K} = I_{11}\omega_1\bar{e}_1 + I_{22}\omega_2\bar{e}_2 + I_{33}\omega_3\bar{e}_3 .$$

Astfel rezultă

$$(2) \qquad \mathcal{M}_1 = \lambda I_{11}\omega_1, \ \mathcal{M}_2 = \lambda I_{22}\omega_2 , \ \mathcal{M}_3 = \lambda I_{33}\omega_3 ,$$

unde λ este o constantă.

Prin urmare, ecuaţiile lui Euler (14.13) devin

$$(3) \qquad \begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 + (I_{33}-I_{22})\omega_2\omega_3 = \lambda I_{11}\omega_1 , \\ I_{22}\dot{\omega}_2 + (I_{11}-I_{33})\omega_3\omega_1 = \lambda I_{22}\omega_2 , \\ I_{33}\dot{\omega}_3 + (I_{22}-I_{11})\omega_1\omega_2 = \lambda I_{33}\omega_3 . \end{cases}$$

Dacă facem schimbarea de variabilă independentă şi de funcţii necunoscute

$$(4) \qquad t = \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda\tilde{t}), \ \omega_i = (1+\lambda\tilde{t})\tilde{\omega}_i , \ (i=\overline{1,3}),$$

atunci avem

$$\frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{1}{1+\lambda\tilde{t}} , \ \dot{\omega}_i = (1+\lambda\tilde{t})^2\frac{d\tilde{\omega}_i}{d\tilde{t}} + \lambda(1+\lambda\tilde{t})\tilde{\omega}_i$$

şi ecuaţiile (3) se transformă în

$$(5) \qquad \begin{cases} I_{11}\frac{d\tilde{\omega}_1}{d\tilde{t}} + (I_{33}-I_{22})\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3 = 0 , \\ I_{22}\frac{d\tilde{\omega}_2}{d\tilde{t}} + (I_{11}-I_{33})\tilde{\omega}_3\tilde{\omega}_1 = 0 , \\ I_{33}\frac{d\tilde{\omega}_3}{d\tilde{t}} + (I_{22}-I_{11})\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 = 0 . \end{cases}$$

Problema s-a redus astfel la cazul Euler-Poinsot.

Cazul considerat în problema de faţă a fost studiat de către Greenhill şi Padova.

293. Să se studieze mişcarea unui rigid cu un punct fix în cazul cînd momentul rezultant al forţelor externe date este de forma

$$\overline{\mathfrak{M}} = \overline{C} \times \overline{\omega} \quad , \tag{1}$$

unde $\overline{C}$ este un vector constant faţă de rigid .

Rezolvare. In acest caz ecuaţiile lui Euler (14.13) se scriu

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 + (I_{33}-I_{22})\omega_2\omega_3 = C_2\omega_3 - C_3\omega_2 \ , \\ I_{22}\dot{\omega}_2 + (I_{11}-I_{33})\omega_3\omega_1 = C_3\omega_1 - C_1\omega_3 \ , \\ I_{33}\dot{\omega}_3 + (I_{22}-I_{11})\omega_1\omega_2 = C_1\omega_2 - C_2\omega_1 \ , \end{cases} \tag{2}$$

în care C_1, C_2, C_3 sînt constante şi reprezintă componentele vectorului $\overline{C}$ faţă de reperul solidar cu rigidul.

Dacă înmulţim ambii membri ai ecuaţiilor (2) respectiv cu $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ şi apoi le adunăm membru cu membru, obţinem integrala primă

$$I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2 = 2h \ , \quad h = \text{const.} \tag{3}$$

De asemenea, dacă înmulţim ecuaţiile (2) pe rînd cu $I_{11}\omega_1 + C_1$, $I_{22}\omega_2 + C_2$, $I_{33}\omega_3 + C_3$ şi apoi le adunăm membru cu membru, deducem integrala primă

$$(I_{11}\omega_1+C_1)^2+(I_{22}\omega_2+C_2)^2+(I_{33}\omega_3+C_3)^2=k^2 \ , \ k = \text{const.} \tag{4}$$

Cu ajutorul integralelor prime (3) şi (4) integrarea ecuaţiilor lui Euler (2) se reduce la cuadraturi. In acest scop, din (3) şi (4) exprimăm pe ω_1 şi ω_2 în funcţie de ω_3 şi apoi introducînd valorile găsite în ecuaţia $(2)_3$ obţinem o ecuaţie diferenţială ordinară cu funcţia necunoscută $\omega_3(t)$.

Acest caz a fost studiat de către Vito Volterra.

294. Să se studieze mişcarea unui rigid de rotaţie cu un punct fix în cazul cînd componentele momentului rezultant, al forţelor date, faţă de un reper solidar cu rigidul, depind numai de t.

Rezolvare. Luăm reperul $Ox_1x_2x_3$ solidar cu rigidul, avînd originea în punctul fix şi axa Ox_3 coincizînd cu axa de rotaţie a corpului.

Rezultă că axele acestui reper sînt axe principale de inerţie şi avem $I_{11} = I_{22}$. In acest caz ecuaţiile lui Euler (14.13) devin

$$(1)\qquad \begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 + (I_{33}-I_{11})\omega_2\omega_3 = \mathcal{M}_1(t), \\ I_{11}\dot{\omega}_2 + (I_{11}-I_{33})\omega_3\omega_1 = \mathcal{M}_2(t), \\ I_{33}\dot{\omega}_3 = \mathcal{M}_3(t), \end{cases}$$

în care funcţiile $\mathcal{M}_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, sînt cunoscute.

Ecuaţia $(1)_3$ conduce la

$$(2)\qquad \omega_3 = \frac{1}{I_{33}}\int_{t_0}^{t} \mathcal{M}_3(u)du,$$

unde t_0 reprezintă momentul iniţial. Prin urmare, am aflat funcţia $\omega_3(t)$.

Pe de altă parte, dacă eliminăm pe ω_2 din ecuaţiile $(1)_1$ şi $(1)_2$ găsim ecuaţia diferenţială pentru funcţia $\omega_1(t)$

$$(3)\qquad \ddot{\omega}_1 - \frac{\dot{\omega}_3}{\omega_3}\dot{\omega}_1 + k^2\omega_3^2\omega_1 = k^2\omega_3^2\Phi(t),$$

unde am făcut notaţiile

$$(4)\quad k = \frac{I_{33}}{I_{11}} - 1, \quad \Phi(t) = \frac{1}{k^2 I_{11}\omega_3^3}(\dot{\mathcal{M}}_1\omega_3 - \mathcal{M}_1\dot{\omega}_3 - k\mathcal{M}_2\omega_3^2),$$

deci $\Phi(t)$ este o funcţie cunoscută.

Ecuaţia (3) se poate reduce la o ecuaţie diferenţială liniară, cu coeficienţi constanţi şi neomogenă. In acest scop

efectuăm schimbarea de variabilă independentă

$$(5) \qquad \tau - \tau_0 = k\int_{t_0}^{t} \omega_3(u)du \ , \quad \tau_0 = \text{const.}$$

şi obţinem

$$(6) \qquad \frac{d^2\omega_1}{d\tau^2} + \omega_1 = \Phi \ .$$

Dacă facem observaţia că ecuaţia (6) se obţine din ecuaţia (2) de la problema 180 pentru $\frac{1}{r} = \omega_1$, $\theta = \tau$, $-\frac{1}{c^2} f = \Phi$, deducem că integrala generală a ecuaţiei (6) este (v.formula (5), problema 180)

$$(7) \qquad \omega_1 = \int_{\tau_0}^{\tau} \Phi(u)\sin(\tau - u)du + C_1\cos\tau + C_2\sin\tau \ ,$$

în care C_1 şi C_2 sînt constante.

Funcţia ω_1 fiind astfel cunoscută, ω_2 se găseşte prin operaţii de derivare. Mai întîi, din ecuaţia $(1)_1$ avem

$$\omega_2 = -\frac{\dot{\omega}_1}{k\omega_3} + \frac{\mathcal{M}_1}{k\omega_3 I_{11}} \ ,$$

iar din (5) şi (7) rezultă

$$\frac{\dot{\omega}_1}{k\omega_3} = \frac{d\omega_1}{d\tau} = \int_{\tau_0}^{\tau} \Phi(u)\cos(\tau - u)du - C_1\sin\tau + C_2\cos\tau \ ,$$

deci

$$(8) \qquad \omega_2 = -\int_{\tau_0}^{\tau} \Phi(u)\cos(\tau - u)du + C_1\sin\tau - C_2\cos\tau + \frac{\mathcal{M}_1}{k\omega_3 I_{11}} \ .$$

Pentru a găsi, în sfîrşit, mişcarea rigidului faţă de un reper fix în spaţiu utilizăm relaţiile (2.21), de unde determinăm unghiurile lui Euler prin cuadraturi.

Această problemă a fost studiată de către V.Nadolschi.

295. O placă omogenă, de grosime neglijabilă, avînd forma unui triunghi isoscel OAB , se mişcă în jurul punctului fix O. Să se studieze mişcarea acestei plăci ştiind că asupra ei nu acţionează nici o forţă activă, raportul dintre baza $\overline{AB}$ şi înălţimea $\overline{OI}$ este $\sqrt{6}$ şi la momentul iniţial placa este

animată de o rotaţie în jurul unei axe care se proiectează în planul ei după OI şi face unghiul $\frac{\pi}{6}$ cu acest plan, iar mărimea vectorului rotaţiei este 2α .

Rezolvare. Luăm reperul $Ox_1x_2x_3$, solidar cu placa, avînd axa Ox_3 coliniară cu vectorul $\overline{OI}$, axa Ox_2 paralelă cu AB , iar Ox_1 normală la planul plăcii. Axele acestui reper sînt axe principale de inerţie. Deoarece nu există forţe date această problemă aparţine cazului Euler-Poinsot de mişcare a unui rigid cu un punct fix.

Pentru a calcula momentele de inerţie ale plăcii în raport cu axele mobile, notăm cu $2b$ lungimea lui AB şi cu ρ densitatea plăcii. Astfel, coordonatele punctelor A şi B faţă de reperul plan x_2Ox_3 sînt respectiv $(b, b\sqrt{\frac{2}{3}})$ şi $(-b, b\sqrt{\frac{2}{3}})$. Ecuaţiile dreptelor OA şi OB sînt

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\, x_2 ,$$

prin urmare, masa plăcii este $M = \rho b^2\sqrt{\frac{2}{3}}$, iar momentele de inerţie au expresiile

$$I_{22} = \rho \int_0^{b\sqrt{\frac{2}{3}}} x_3^2 dx_3 \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}x_3}^{\sqrt{\frac{3}{2}}x_3} dx_2 = \frac{b^2}{3} M ,$$

$$I_{33} = \rho \int_0^{b\sqrt{\frac{2}{3}}} dx_3 \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}x_3}^{\sqrt{\frac{3}{2}}x_3} x_2^2 dx_2 = \frac{b^2}{6} M ,$$

$$I_{11} = I_{22} + I_{33} = \frac{b^2}{2} M .$$

Cu acestea ecuaţiile lui Euler (14.13) se reduc la

$$(1) \qquad 3\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3 = 0 , \quad \dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1 = 0 , \quad \dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2 = 0 ,$$

care admit integralele prime (v. relaţiile (14.20) şi (14.21))

$$(2) \qquad \begin{cases} 3\omega_1^2 + 2\omega_2^2 + \omega_3^2 = h , & h = \text{const.}, \\ 9\omega_1^2 + 4\omega_2^2 + \omega_3^2 = k^2, & k = \text{const.} \end{cases}$$

La momentul inițial avem

(3) $$t = 0 , \quad \omega_1^0 = \alpha , \quad \omega_2^0 = 0 , \quad \omega_3^0 = \alpha\sqrt{3} ,$$

deci

$$h = 6\alpha^2 , \quad k^2 = 12\alpha^2 .$$

Avînd în vedere valorile găsite pentru h și k, din (2) deducem

4) $$\omega_3 = \omega_1\sqrt{3} , \quad \omega_2 = \sqrt{3(\alpha^2 - \omega_1^2)} .$$

Dacă înlocuim pe ω_2 și ω_3 din (4) în $(1)_1$ obținem

$$\dot{\omega}_1 = \omega_1\sqrt{\alpha^2 - \omega_1^2} ,$$

de unde

(5) $$\omega_1 = \frac{\alpha}{ch\,\alpha t} , \quad \omega_2 = \alpha\sqrt{3}\,th\,\alpha t , \quad \omega_3 = \frac{\alpha\sqrt{3}}{ch\,\alpha t} .$$

Odată $\omega_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, determinați, pentru a afla mișcarea rigidului trebuie să determinăm unghiurile lui Euler ca funcții de timp din sistemul (2.21). In cazul nostru însă se obține o simplificare dacă alegem ca axă $O\xi_3$ axa definită de vectorul moment cinetic total, care este fix în spațiu.

Pe de o parte, în cazul de față din (14.6) rezultă

$$\bar{K} = \frac{b^2M}{6}(3\omega_1\bar{e}_1 + 2\omega_2\bar{e}_2 + \omega_3\bar{e}_3) ,$$

iar, pe de altă parte, din (2.19) găsim

$$\bar{\varepsilon}_3 = vers\,\bar{K} = \bar{e}_1\sin\varphi\sin\theta + \bar{e}_2\cos\varphi\sin\theta + \bar{e}_3\cos\theta ,$$

deci

(6) $$\sin\varphi\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2ch\,\alpha t} , \cos\varphi\sin\theta = th\,\alpha t, \quad \cos\theta = \frac{1}{2ch\,\alpha t} .$$

Prin urmare, sistemul (6) dă

(7) $$tg\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2sh\,\alpha t} , \quad \cos\theta = \frac{1}{2ch\,\alpha t} ,$$

iar ecuația $(2.21)_3$ conduce la

$$\dot{\psi} = 3\alpha\sqrt{3} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{4ch^2\alpha t - 1} ,$$

de unde

(8) $$\psi - \psi_0 = 3\sqrt{3}\alpha t + arctg\,\frac{2}{\sqrt{3}}(e^{2\alpha t} + \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{3} , \quad \psi_0 = const.$$

Pentru a calcula forţa de legătură $\bar{L}$ aplicată în punctul fix O folosim teorema mişcării centrului de masă. Avem

$$\bar{r}^* = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} b\bar{e}_3 \ , \quad \bar{a}^* = \bar{\omega} \times \bar{r}^* + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}^*) \ ,$$

deci

$$(9)\quad \bar{L} = M\bar{a}^* = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{\alpha^2 bM}{ch^2 \alpha t}\left[2\bar{e}_2 sh\,\alpha t - (1+3sh^2 \alpha t)\bar{e}_3\right] .$$

296. Extremităţile A_1 şi A_2 ale unei bare omogene şi grele, descriu respectiv axa orizontală $\Omega\xi_1$, axa verticală $\Omega\xi_2$, coeficientul de frecare al celor două drepte fiind egal cu unitatea ($f = 1$). Să se studieze mişcarea barei ştiind că la momentul iniţial punctul A_2 se deplasează către Ω.

Rezolvare. Notăm cu $2a$ lungimea barei şi cu ρ densitatea sa. Masa totală a barei este $M = 2a\rho$. Presupunem că axa $\Omega\xi_2$ este verticală ascendentă şi luăm reperul x_1Ox_2 solidar cu bara, avînd originea în centrul de masă al barei, axa Ox_1 coliniară cu vectorul $\overrightarrow{A_1A_2}$ şi la fel orientat cu $\xi_1\Omega\xi_2$. Avem un sistem mecanic cu un grad de libertate. Poziţia barei este determinată de mijlocul său O, care descrie un cerc cu centrul în Ω şi de rază egală cu a . Notăm cu θ unghiul dintre $\overrightarrow{\Omega O}$ şi verticala descendentă. Rezultă că unghiul dintre axa Ox_1 şi $\Omega\xi_1$ este $\frac{3\pi}{2} - \theta$. Astfel avem

$$\bar{e}_1 = -\bar{\varepsilon}_1 \sin\theta - \bar{\varepsilon}_2 \cos\theta \ , \quad \bar{e}_2 = \bar{\varepsilon}_1 \cos\theta - \bar{\varepsilon}_2 \sin\theta \ , \quad \bar{e}_3 = \bar{\varepsilon}_3$$

şi

$$(1)\qquad \bar{r}_0 = a(\bar{\varepsilon}_1 \sin\theta - \bar{\varepsilon}_2 \cos\theta), \quad \bar{\omega} = -\dot{\theta}\bar{\varepsilon}_3 \ .$$

Forţele externe care acţionează asupra barei A_1A_2 sînt greutatea totală a sa egală cu $M\bar{g}$, aplicată în punctul O şi forţele de legătură $\bar{L}_1, \bar{L}_2$, aplicate respectiv în punctele A_1, A_2 . Ţinînd seama de (8.13) şi (14.27) putem scrie

(2) $\bar{L}_1 = N_1(-\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)$, $\bar{L}_2 = N_2(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)$.

Pentru determinarea legii mişcării şi a forţelor de legătură N_1 şi N_2 , utilizăm ecuaţiile (14.10) şi (14.15). In cazul de faţă avem

(3) $\bar{r}^* = 0$, $\bar{a}_o = \ddot{\bar{\rho}}_o$, $I_{33} = \frac{Ma^2}{3}$,

iar momentul rezultant al forţelor externe faţă de punctul O este

(4) $\bar{M} = a\left[(N_1 - N_2)\sin\theta + (N_1+N_2)\cos\theta\right]\bar{\varepsilon}_3$.

Astfel obţinem ecuaţiile

(5) $$\begin{cases} Ma(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = N_2 - N_1 , \\ Ma(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = N_1 + N_2 - Mg , \\ Ma\ddot{\theta} = 3(N_2 - N_1)\sin\theta - 3(N_1 + N_2)\cos\theta . \end{cases}$$

Dacă eliminăm pe $N_2 - N_1$ şi $N_1 + N_2$ din ecuaţiile (5) găsim

(6) $\ddot{\theta} + 3\dot{\theta}^2 + \frac{3g}{a}\cos\theta = 0$,

ecuaţie care este analogă cu aceea a mişcării unui pendul simplu supus unei rezistenţe a mediului proporţională cu pătratul vitezei.

Avînd în vedere că

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} ,$$

egalitatea (6) se reduce la

(7) $\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + 6\dot{\theta}^2 = -\frac{6g}{a}\cos\theta$,

care este o ecuaţie liniară în $\dot{\theta}^2$ şi are integrala generală

(8) $\dot{\theta}^2 = C\,e^{-6\theta} - \frac{6g}{37\,a}(\sin\theta + 6\cos\theta)$,

unde C este o constantă ce se determină din datele iniţiale.

Din (7) rezultă că pentru $\dot{\theta}_o^2 + \frac{6g}{a}\cos\theta_o < 0$, începînd din momentul iniţial $\dot{\theta}^2$ este o funcţie crescătoare şi

extremităţile barei alunecă pe cele două axe, cu viteze ale căror mărimi sînt crescătoare. Dacă $\dot{\theta}_o^2 + \frac{6g}{a}\cos\theta_o > 0$, atunci la început $\dot{\theta}^2$ descreşte şi există o valoare a lui θ pentru care $\dot{\theta}^2$ se anulează. Bara se opreşte atunci în poziţia corespunzătoare, unde rămîne în echilibru.

Relaţiile (5),(6) şi (8) ne permit să aflăm pe N_1 şi N_2 în funcţie de θ. Calculele precedente sînt valabile numai pentru N_1 şi N_2 pozitivi. Dacă una dintre aceste reacţiuni se anulează şi apoi devine negativă, extremitatea corespunzătoare a barei scapă de legătură. Începînd din acest moment ecuaţiile de mişcare trebuiesc modificate.

In mod analog se poate studia mişcarea barei A_1A_2 în cazul cînd coeficientul de frecare are o valoare oarecare f. In particular, pentru $f = 0$ se obţine cazul în care nu există frecare.

297. Un disc circular omogen greu situat într-un plan vertical (v. fig.26) este plasat pe o dreaptă fixă $\Omega\xi_1$ înclinată faţă de orizontală cu unghiul α şi este abandonat fără viteză iniţială. Presupunînd că există frecare, să se studieze mişcarea discului.

Rezolvare. Vom folosi unele rezultate de la problema 283. In cazul cînd discul se rostogoleşte fără alunecare sîntem în condiţiile problemei 283, iar reacţiunea tangenţială dreptei şi reacţiunea normală au expresiile (6) de la problema citată. Pentru că rostogolirea să fie posibilă, trebuie ca reacţiunea tangenţială Φ să fie mai mică decît fN, f fiind coeficientul de frecare

$$\frac{Mg\sin\alpha}{3} < fMg\cos\alpha \quad , \text{ sau } tg\alpha < 3f .$$

Dacă această condiţie nu este îndeplinită, rostogolirea discului nu poate avea loc fără alunecare.

In continuare vom trata problema în această ipoteză, adică presupunem că discul se rostogoleşte şi alunecă în acelaşi timp. Forţa de legătură L se descompune în acest caz sub forma

(1) $$\bar{L} = N(-f\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2) ,$$

iar unghiul θ şi abscisa centrului ξ_1^0 (v problema 283) sînt independente. Prin urmare, sistemul mecanic actual are două grade de libertate. Teorema mişcării centrului de masă dă ecuaţiile

(2) $$M\ddot{\xi}_1^0 = Mg\sin\alpha - fN \quad , \quad 0 = -Mg\cos\alpha + N .$$

Reacţiunea normală N este deci constantă. Eliminînd pe N din ecuaţiile (2) obţinem ecuaţia diferenţială

(3) $$\ddot{\xi}_1^0 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) .$$

Deoarece $tg\alpha < 3f$ deducem că $\ddot{\xi}_1^0$ are o valoare constantă pozitivă în tot timpul mişcării. Cum discul porneşte din repaus, avem

(4) $$\xi_1^0 = \frac{gt^2}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha) .$$

Pentru determinarea unghiului θ folosim teorema momentului cinetic faţă de punctul O. Se găseşte ecuaţia (v. formula (9), problema 283)

$$\ddot{\theta} = \frac{2fg}{R}\cos\alpha \quad , \text{ deci} \quad \theta = \frac{fgt^2}{R}\cos\alpha \quad .$$

Capitolul XV

STATICA SISTEMELOR MECANICE

Dacă notăm cu $\bar{L}(e)$ măsura vectorială care reprezintă distribuţia forţelor de legătură ale unui sistem mecanic, atunci principiul lucrului mecanic virtual (v. cap.VIII) se exprimă prin relaţia

(15.1) $$\int_D (\delta\bar{r})\,d\bar{L} \geq 0 ,$$

unde $\delta\bar{r}$ reprezintă o deplasare virtuală, compatibilă cu legăturile, a unui punct oarecare al sistemului. Pentru legături bilaterale relaţia (15.1) este o egalitate.

Starea de echilibru a unui sistem mecanic supus la legături scleronome fără frecare şi care la momentul iniţial este în repaus, este caracterizată de

Teorema fundamentală a staticii. Condiţia necesară şi suficientă de echilibru a unui sistem material este ca lucrul mecanic al forţelor active pentru orice deplasare virtuală compatibilă cu legăturile să fie nepozitiv, adică

(15.2) $$\int_D \bar{F}(\delta\bar{r})\,dm \leq 0 .$$

Pentru legături bilaterale relaţia (15.2) este o egalitate.

Statica rigidului. In cazul unui rigid, o deplasare virtuală a unui punct al său este de forma

(15.3) $$\delta\bar{\rho} = \delta\bar{\rho}_0 + (\delta\bar{\chi}) \times \bar{r} ,$$

în care $\delta\bar{\rho}_0 = (\delta\xi_i^0)\bar{E}_i$ reprezintă o translaţie virtuală,

iar $\delta\bar{\chi} = (\delta\chi_i)\bar{\varepsilon}_i$ reprezintă o rotaţie instantanee virtuală.

Dacă sistemul mecanic este rigid, atunci relaţia (15.2) se scrie

(15.4) $$\bar{\mathcal{R}}\,\delta\bar{\rho}_0 + \bar{\mathcal{M}}_0\,\delta\bar{\chi} \leq 0 ,$$

în care $\bar{\mathcal{R}}$ este rezultanta forţelor active, iar $\bar{\mathcal{M}}_0$ momentul rezultant al lor faţă de punctul O.

Pentru un rigid liber avem următoarea

Teoremă. Condiţia necesară şi suficientă de echilibru a unui rigid liber este ca forţele active care acţionează asupra sa să formeze un sistem echivalent cu zero (v. cap. XII).

In cazul unui rigid supus la legături bilaterale, vectorii $\delta\bar{\rho}_0$ şi $\delta\bar{\chi}$ trebuie să verifice ecuaţiile legăturilor pe care le presupunem de forma

(15.5) $$\bar{a}_s\,\delta\bar{\rho}_0 + b_s\,\delta\bar{\chi} = 0 , \quad s = \overline{1,p},\ p < 6 ,$$

unde vectorii $\bar{a}_s$ şi $\bar{b}_s$ sînt cunoscuţi în funcţie de parametrii rigidului.

Ecuaţiile de echilibru ale unui rigid supus la legăturile (15.5) sînt

(15.6) $$\bar{\mathcal{R}} + L_s\bar{a}_s = 0 , \quad \bar{\mathcal{M}}_0 + L_s\bar{b}_s = 0 ,$$

unde necunoscutele L_s se numesc multiplicatorii lui Lagrange.

Pentru un rigid cu un punct fix avem

(15.7) $$p = 3,\ s = i,\ \bar{a}_i = \bar{\varepsilon}_i ,\ \bar{b}_i = 0 ,$$

iar în cazul unui rigid cu un ax fix rezultă

(15.8) $$p=5,\ \bar{a}_i = \bar{\varepsilon}_i,\ \bar{b}_i = 0,\ i = \overline{1,3},\ \bar{a}_4 = \bar{a}_5 = 0,\ \bar{b}_4 = \bar{\varepsilon}_1,\ \bar{b}_5 = \bar{\varepsilon}_2 .$$

Statica sistemelor articulate. Se numeşte sistem articulat un sistem mecanic format din bare rectilinii şi rigide, care sînt legate între ele prin articulaţii, numite noduri. Un sistem articulat a cărui configuraţie geometrică reprezintă o linie poligonală deschisă, astfel încît prin suprimarea unei

bare intermediare îşi pierde unitatea, se numeşte simplu conex. Sistemul articulat se numeşte multiplu conex, dacă este posibil să se înlăture una dintre barele intermediare, fără ca sistemul să-şi piardă unitatea (cum este cazul unui poligon închis).

Din punct de vedere mecanic sistemele articulate sînt formate din bare materiale şi din puncte materiale (nodurile) supuse acţiunilor unor forţe externe date.

Pentru sistemele articulate simplu conexe avem

Teoremă. Condiţia necesară şi suficientă de echilibru a unui sistem articulat simplu conex este ca rezultanta forţelor externe aplicate la articulaţii să fie nulă şi momentul rezultant al forţelor aplicate de o parte a unei articulaţii oarecare, în raport cu această articulaţie, să fie nul.

Statica firelor flexibile. Prin definiţie un fir perfect flexibil este un corp liniar astfel încît tensiunile interne într-o secţiune făcută în punctul P sînt reprezentate prin două forţe opuse $\bar{T}$ şi $-\bar{T}$ aplicate în P. Forţa $\bar{T}$ se numeşte tensiunea firului şi are forma

$$\bar{T} = T\bar{\tau}\ ,\ T = T(s) > 0\ ,\ \bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}\ , \tag{15.9}$$

unde s este lungimea de arc a firului, iar $\bar{\tau}$ versorul tangentei.

Condiţia de echilibru a firului se exprimă prin relaţia

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{d\bar{r}}{ds}\right) + \bar{F} = 0\ , \tag{15.10}$$

unde $\bar{F} = \bar{F}(s)$ este forţa specifică de lungime în punctul P. Egalitatea (15.10) se numeşte ecuaţia vectorială nedefinită de echilibru a firului. Configuraţiile de echilibru ale firului se numesc curbe funiculare şi sînt caracterizate de ecuaţia (15.10) împreună cu condiţia $T > 0$.

Proiecţiile ecuaţiei (15.10) pe axele reperului $Ox_1x_2x_3$ se

numesc ecuaţiile nedefinite de echilibru ale firului şi au forma

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx_i}{ds}\right)+F_i=0\ ,\quad i=\overline{1,3}\ . \tag{15.11}$$

Dacă proiectăm ecuaţia (15.10) pe axele triedrului lui Frenet al curbei funiculare în punctul P, obţinem forma intrinsecă a ecuaţiilor scalare nedefinite de echilibru

$$\frac{dT}{ds}+F_\tau=0\ ,\quad \frac{T}{R}+F_\nu=0\ ,\quad F_\beta=0\ . \tag{15.12}$$

Integrarea ecuaţiilor de echilibru ale firului introduce constante arbitrare, care se determină din condiţii suplimentare. In particular, aceste condiţii se pot referi la extremităţile firului.

298. Să se afle poziţiile de echilibru ale unui sistem format din două puncte materiale grele de aceeaşi masă, care alunecă fără frecare pe o parabolă a cărei axă este verticală şi se resping cu o forţă invers proporţională cu distanţa lor.

Rezolvare. Considerăm reperul x_1Ox_2 a cărui axă Ox_1 este tangentă la parabolă în vîrful acesteia, deci este orizontală, iar axa Ox_2 este verticală ascendentă care coincide cu axa parabolei. Astfel ecuaţia parabolei date este de forma

$$x_1^2=2px_2\ ,\quad p=\text{const.}>0\ . \tag{1}$$

Fie P_1,P_2 punctele date, m masa comună a lor şi $\bar r_1,\bar r_2$ vectorii de poziţie corespunzători. Dacă notăm cu x şi y abscisele punctelor P_1 şi P_2 respectiv, atunci avem

$$\bar r_1=x\bar e_1+\frac{x^2}{2p}\bar e_2\ ,\quad \bar r_2=y\bar e_1+\frac{y^2}{2p}\bar e_2\ . \tag{2}$$

Forţele active care acţionează asupra celor două puncte au expresiile

$$\begin{cases}\bar F_1=m\bar g+mk^2\dfrac{\bar r_1-\bar r_2}{|\bar r_1-\bar r_2|^2}\ ,\\ \bar F_2=m\bar g-mk^2\dfrac{\bar r_1-\bar r_2}{|\bar r_1-\bar r_2|^2}\ ,\end{cases} \tag{3}$$

unde k este o constantă dată .

In cazul de faţă condiţia de echilibru (15.2) se reduce la

$$\bar{F}_1 \delta \bar{r}_1 + \bar{F}_2 \delta \bar{r}_2 = 0 , \tag{4}$$

oricare ar fi deplasările $\delta \bar{r}_1$ şi $\delta \bar{r}_2$ tangente la parabola (1).

Din (3) şi (4) deducem

$$\bar{g}(\delta \bar{r}_1 + \delta \bar{r}_2) + \frac{k^2}{2} \frac{\delta |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^2} = 0 . \tag{5}$$

Relaţiile (2) şi (5) conduc la

$$k^2 \frac{(x+y)(\delta x + \delta y)}{4p^2 + (x+y)^2} + k^2 \frac{\delta x - \delta y}{x - y} - \frac{g}{p}(x \delta x + y \delta y) = 0 . \tag{6}$$

Egalitatea (6) trebuie să aibă loc pentru orice δx şi δy , prin urmare, rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{k^2(x+y)}{4p^2 + (x+y)^2} + \dfrac{k^2}{x-y} - \dfrac{g}{p} x = 0 , \\ \dfrac{k^2(x+y)}{4p^2 + (x+y)^2} - \dfrac{k^2}{x-y} - \dfrac{g}{p} y = 0 . \end{cases} \tag{7}$$

Dacă adunăm membru cu membru ecuaţiile (7) obţinem

$$(x+y)\left[\frac{2k^2}{4p^2 + (x+y)^2} - \frac{g}{p}\right] = 0 . \tag{8}$$

De asemenea, prin scăderea membru cu membru a ecuaţiilor (7) găsim

$$x - y = \varepsilon_1 k \sqrt{\frac{2p}{g}} , \quad \varepsilon_1 = \pm 1 . \tag{9}$$

Ecuaţia (8) arată că

$$x + y = 0, \text{ sau } x + y = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{2p}{g}(k^2 - 2pg)} , \quad \varepsilon_2 = \pm 1 . \tag{8'}$$

Astfel avem soluţia

$$x = -y = \varepsilon_1 k \sqrt{\frac{p}{2g}} , \tag{10}$$

iar pentru $k^2 > 2pg$, avem şi soluţia

$$x = \varepsilon_1 k \sqrt{\frac{p}{2g}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{p}{2g}(k^2 - 2pg)} , \tag{11}_4$$

$$y = -\varepsilon_1 k\sqrt{\frac{p}{2g}} + \varepsilon_2\sqrt{\frac{p}{2g}(k^2-2pg)} \quad .$$

(m)$_2$

Observaţie. Ecuaţiile (7) pot fi obţinute şi pe altă cale. Pentru aceasta exprimăm faptul că fiecare dintre cele două puncte se află în echilibru. Fie $\bar{L}_1$ şi $\bar{L}_2$ forţele de legătură din punctele P_1 şi P_2 respectiv. Deoarece parabola dată este presupusă lucie, rezultă că vectorii $\bar{L}_1$ şi $\bar{L}_2$ sînt normali la curba (1) în punctele respective, deci ei sînt de forma

$$(12) \qquad \bar{L}_1 = \lambda_1(x\bar{e}_1 - p\bar{e}_2) \ , \ \bar{L}_2 = \lambda_2(y\bar{e}_1 - p\bar{e}_2) \ .$$

Ecuaţiile de echilibru ale celor două puncte sînt

$$(13) \begin{cases} \dfrac{2pmk^2\left[2p\bar{e}_1+(x+y)\bar{e}_2\right]}{(x-y)\left[4p^2+(x+y)^2\right]} - mg\bar{e}_2 + \lambda_1(x\bar{e}_1 - p\bar{e}_2) = 0 \ , \\ \dfrac{2pmk^2\left[2p\bar{e}_1+(x+y)\bar{e}_2\right]}{(x-y)\left[4p^2+(x+y)^2\right]} + mg\bar{e}_2 + \lambda_2(y\bar{e}_1 - p\bar{e}_2) = 0 \ . \end{cases}$$

Dacă eliminăm necunoscuta λ_1 din ecuaţia vectorială $(13)_1$ şi pe λ_2 din $(13)_2$, găsim ecuaţiile (7). Odată determinate poziţiile de echilibru ale sistemului, forţele de legătură corespunzătoare se află din relaţiile (13) şi (12).

299. In planul vertical x_1Ox_2 se consideră dreptele (Δ_1) şi (Δ_2) care trec prin punctul O şi sînt înclinate faţă de axa orizontală Ox_1 cu unghiurile α_1 şi α_2 respectiv. Două puncte materiale grele P_1 şi P_2, de mase m_1 şi m_2, legate între ele cu un fir inextensibil de lungime a şi de masă neglijabilă, alunecă fără frecare primul pe (Δ_1) iar al doilea pe (Δ_2). Să se afle poziţia de echilibru a sistemului.

Rezolvare. Presupunem că axa Ox_2 este verticală ascendentă. Dacă firul este întins sistemul mecanic dat are un singur grad de libertate. Luăm ca parametru unghiul $\theta = \widehat{OP_1P_2}$ şi presupunem $\alpha_1 < \alpha_2$. Astfel avem

$$(1)\qquad \overline{OP}_1 = a\frac{\sin(\theta+\alpha_2-\alpha_1)}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)},\quad \overline{OP}_2 = a\frac{\sin\theta}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Vectorii de poziție ai celor două puncte au expresiile

$$(2)\qquad \bar{r}_1 = \overline{OP}_1(\bar{e}_1\cos\alpha_1+\bar{e}_2\sin\alpha_1),\quad \bar{r}_2=\overline{OP}_2(\bar{e}_1\cos\alpha_2+\bar{e}_2\sin\alpha_2).$$

Deoarece legătura dată este bilaterală, relația (15.2) devine

$$(3)\qquad \bar{g}(m_1\delta\bar{r}_1 + m_2\delta\bar{r}_2) = 0\ ,$$

oricare ar fi deplasările virtuale $\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2$ de-a lungul dreptelor respective.

Relațiile (1)-(3) conduc la ecuația

$$(4)\qquad tg\theta = \frac{m_1\sin\alpha_1\cos(\alpha_2-\alpha_1)+m_2\sin\alpha_2}{m_1\sin\alpha_1\sin(\alpha_2-\alpha_1)}\ ,$$

de unde se determină poziția de echilibru a sistemului.

Observație. Putem, de asemenea, utiliza ecuațiile de echilibru ale punctelor P_1 și P_2. Fie $\bar{T}$ tensiunea firului în P_1 și $\bar{L}_1, \bar{L}_2$ forțele de legătură ale dreptelor $(\Delta_1), (\Delta_2)$ respectiv. Tensiunea $\bar{T}$ este coliniară cu vectorul $\overrightarrow{P_1P_2}$, forța $\bar{L}_1$ este normală dreptei (Δ_1) în punctul P_1, iar $\bar{L}_2$ este perpendiculară pe (Δ_2) în P_2. Prin urmare, avem

$$(5)\qquad \begin{cases} \bar{T} = -T[\bar{e}_1\cos(\alpha_1-\theta)+\bar{e}_2\sin(\alpha_1-\theta)]\ , \\ \bar{L}_1 = -L_1(\bar{e}_1\sin\alpha_1-\bar{e}_2\cos\alpha_1)\ , \\ \bar{L}_2 = -L_2(\bar{e}_1\sin\alpha_2-\bar{e}_2\cos\alpha_2)\ . \end{cases}$$

Ecuațiile de echilibru ale punctelor P_1 și P_2 sînt

$$(6)\qquad m_1\bar{g} + \bar{T} + \bar{L}_1 = 0\ ,\quad m_2\bar{g} - \bar{T} + \bar{L}_2 = 0\ ,$$

sau, pe componente, față de axele Ox_1 și Ox_2

$$(7)\qquad \begin{cases} T\cos(\alpha_1-\theta)+L_1\sin\alpha_1 = 0\ , \\ T\sin(\alpha_1-\theta)-L_1\cos\alpha_1 + m_1g = 0\ , \\ T\cos(\alpha_1-\theta) - L_2\sin\alpha_2 = 0\ , \\ -T\sin(\alpha_1-\theta) + L_2\cos\alpha_2-m_2g = 0\ . \end{cases}$$

Din sistemul (7) regăsim ecuaţia (4) şi, în plus, determinăm tensiunea T a firului şi reacţiunile L_1 şi L_2 ale celor două drepte.

Remarcăm faptul că ecuaţia $(6)_1$ poate fi proiectată pe axa (Δ_1), avînd sensul vectorului $\overrightarrow{OP}_1$ şi pe normala sa în P_1, iar ecuaţia $(6)_2$ poate fi proiectată pe axa (Δ_2) şi pe normala sa în P_2.

300. Se consideră două puncte materiale P_1 şi P_2, de mase m_1 şi m_2, care alunecă fără frecare pe elipsoidul

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_2^2}=1 \tag{1}$$

şi care se atrag sau se resping reciproc cu o forţă proporţională cu distanţa dintre ele. Să se afle poziţiile de echilibru ale sistemului.

Rezolvare. Fie $\bar{r}_1(y_1,y_2,y_3)$ şi $\bar{r}_2(z_1,z_2,z_3)$ vectorii de poziţie ai celor două puncte. Forţa care acţionează asupra punctului P_1 este de forma $\lambda(\bar{r}_1-\bar{r}_2)$, iar cea aplicată punctului P_2 este $\lambda(\bar{r}_2-\bar{r}_1)$, unde λ este o constantă negativă pentru forţe de atracţie şi pozitivă pentru forţe de respingere.

Deplasările virtuale ale sistemului fiind tangente la elipsoidul (1) satisfac relaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{y_1\delta y_1}{a_1^2}+\dfrac{y_2\delta y_2}{a_2^2}+\dfrac{y_3\delta y_3}{a_3^2}=0, \\ \dfrac{z_1\delta z_1}{a_1^2}+\dfrac{z_2\delta z_2}{a_2^2}+\dfrac{z_3\delta z_3}{a_3^2}=0. \end{cases} \tag{2}$$

In cazul de faţă condiţia de echilibru (15.2) se reduce la

$$(\bar{r}_1-\bar{r}_2)\,\delta(\bar{r}_1-\bar{r}_2)=\frac{1}{2}\,(\bar{r}_1-\bar{r}_2)^2=0,$$

sau

(3) $$(y_i-z_i)\,\delta(y_i-z_i) = 0 , \qquad i = \overline{1,3} ,$$

care trebuie să aibă loc pentru orice deplasări $\delta y_i, \delta z_i$ ce verifică (2).

Condiţiile (2) şi (3) pot fi reunite în una singură prin metoda multiplicatorilor datorită lui Lagrange. Dacă înmulţim ecuaţiile (2) respectiv cu λ_1, λ_2 şi le adunăm la (3), obţinem condiţia de echilibru sub forma

(4) $$\sum_{i=1}^{3}\left\{\left[(1+\frac{\lambda_1}{a_i^2})y_i-z_i\right]\delta y_i+\left[(1+\frac{\lambda_2}{a_i^2})z_i-y_i\right]\delta z_i\right\} = 0 ,$$

relaţie care trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi factorii λ_1, λ_2 şi pentru toate deplasările $\delta y_i, \delta z_i$ care verifică egalităţile (2). Rezultă

(5) $$(1+\frac{\lambda_1}{a_1^2})y_1-z_1 = 0 , \quad -y_1 + (1+\frac{\lambda_2}{a_1^2})z_1 = 0 ,$$

(6) $$(1+\frac{\lambda_1}{a_2^2})y_2 - z_2 = 0 , \quad -y_2 + (1+\frac{\lambda_2}{a_2^2})z_2 = 0 ,$$

(7) $$(1+\frac{\lambda_1}{a_3^2})y_3-z_3 = 0 , \quad -y_3 + (1+\frac{\lambda_2}{a_3^2})z_3 = 0 .$$

In afara ecuaţiilor (5)-(7) coordonatele punctelor P_1 şi P_2 trebuie să verifice ecuaţia (1).

Din ecuaţiile (5) obţinem fie $y_1 = z_1 = 0$, fie că determinantul acestor ecuaţii este nul , adică

(8) $$\lambda_1\lambda_2 + a_1^2(\lambda_1+\lambda_2) = 0 .$$

In mod analog, ecuaţiile (6) dau, fie $y_2 = z_2 = 0$, fie

(9) $$\lambda_1\lambda_2 + a_2^2(\lambda_1+\lambda_2) = 0 .$$

De asemenea, ecuaţiile (7) dau, fie $y_3 = z_3 = 0$, fie

(10) $$\lambda_1\lambda_2 + a_3^2(\lambda_1+\lambda_2) = 0 .$$

Dacă a_1, a_2, a_3 nu sînt egali între ei, ecuaţiile (8)-(10)

sînt compatibile numai dacă $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, ceea ce atrage după sine egalităţile

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 .$$

In acest caz, din ecuaţiile (5) - (7) găsim

$$y_i = z_i , \quad i = \overline{1,3} ,$$

adică poziţiile celor două puncte materiale coincid, dar sînt arbitrare pe suprafaţa elipsoidului dat. Poziţiile de echilibru găsite, care acoperă toată suprafaţa elipsoidului, le numim poziţii de echilibru de speţa întîia.

Dacă $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, numai una dintre ecuaţiile (8)-(10) poate fi satisfăcută, de exemplu ecuaţia (8). Atunci

$$y_2 = z_2 = y_3 = z_3 = 0 ,$$

prin urmare , $y_1 = a_1$, $z_1 = -a_1$, sau $y_1 = -a_1$, $z_1 = a_1$, adică punctele materiale sînt situate la extremităţile axei elipsoidului, egală cu $2a_1$. Poziţiile de echilibru ale sistemului pentru care P_1 nu coincide cu P_2 le numim de speţa a doua. Excludem cazul $y_1 = z_1 = \pm a_1$, deoarece acesta ne conduce din nou la poziţii de echilibru de speţa întîia. Factorii λ_1 şi λ_2 sînt egali fiecare cu $-2a_1^2$.

In mod analog, găsim încă patru poziţii de echilibru de speţa a doua şi anume

$$y_3 = z_3 = y_1 = z_1 = 0 , \quad y_2 = \pm a_2 , \quad z_2 = \mp a_2 ,$$

$$y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = 0 , \quad y_3 = \pm a_3 , \quad z_3 = \mp a_3 .$$

Pentru $a_2 = a_3$ şi poziţiile de echilibru de speţa a doua alcătuiesc o mulţime infinită; ele sînt situate pe ecuatorul elipsoidului şi abscisele lor sînt $y_1 = z_1 = 0$.

In sfîrşit, dacă $a_1 = a_2 = a_3$, atunci poziţiile de echilibru de speţa a doua acoperă toată suprafaţa elipsoidului.

301. Trei puncte materiale, obligate să rămînă pe un cerc lucciu, se resping proporţional cu masele lor şi cu distanţele dintre ele. Să se afle poziţiile de echilibru.

Rezolvare. Considerăm punctele materiale P_i, de mase m_i, $i=\overline{1,3}$, situate pe cercul de rază R. Acest sistem mecanic are trei grade de libertate. Forţele care acţionează asupra punctelor P_i sînt de forma

$$(1)\qquad \begin{cases} \bar{F}_1 = km_1(m_2\overrightarrow{P_2P_1} + m_3\overrightarrow{P_3P_1}) , \\ \bar{F}_2 = km_2(m_3\overrightarrow{P_3P_2} + m_1\overrightarrow{P_1P_2}) , \\ \bar{F}_3 = km_3(m_1\overrightarrow{P_1P_3} + m_2\overrightarrow{P_2P_3}) , \end{cases}$$

unde k este o constantă pozitivă.

Luăm sistemul de coordonate x_1Ox_2 ale cărui axe au ca suporturi două diametre ortogonale ale cercului dat. Dacă notăm cu θ_i unghiul vectorului $\overrightarrow{OP_i}$, $i=\overline{1,3}$, cu axa Ox_1, atunci vectorii de poziţie ai punctelor P_i au expresiile

$$(2)\qquad \bar{r}_i = R(\bar{e}_1\cos\theta_i + \bar{e}_2\sin\theta_i) , \quad i=\overline{1,3} .$$

Forţele $\bar{F}_i$ sînt forţe active interne pentru sistemul mecanic format din cele trei puncte. Lucrul mecanic elementar al acestor forţe este

$$d\mathcal{L}_{int} = \frac{k}{2}\, d\left[m_1m_2(\bar{r}_1-\bar{r}_2)^2 + m_2m_3(\bar{r}_2-\bar{r}_3)^2 + m_3m_1(\bar{r}_3-\bar{r}_1)^2\right] .$$

Rezultă că sistemul mecanic dat este conservativ şi funcţia de forţe este de forma

$$(3)\quad U = -kR^2\left[m_1m_2\cos(\theta_1-\theta_2) + m_2m_3\cos(\theta_2-\theta_3) + m_3m_1\cos(\theta_3-\theta_1)\right] .$$

In cazul de faţă condiţia de echilibru (15.2) se scrie

$$(4)\qquad \delta\mathcal{L}_{int} = \bar{F}_i\,\delta\bar{r}_i = 0 , \quad i=\overline{1,3} ,$$

oricare ar fi deplasările virtuale $\delta\bar{r}_i$ tangente la cercul dat.

Egalitatea (4) conduce la

$$(5)\qquad m_1m_2\sin(\theta_1-\theta_2)\,\delta(\theta_1-\theta_2) + m_2m_3\sin(\theta_2-\theta_3)\,\delta(\theta_2-\theta_3) +$$

$$+ m_3 m_1 \sin(\theta_3 - \theta_1)\,\delta(\theta_3 - \theta_1) = 0 ,$$

relaţie care trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi $\delta\theta_i$, $i=\overline{1,3}$, adică oricare ar fi $\delta(\theta_1 - \theta_2)$, $\delta(\theta_2 - \theta_3)$, $\delta(\theta_3 - \theta_1)$. Astfel obţinem

$$(6) \qquad \frac{\sin(\theta_2 - \theta_3)}{m_1} = \frac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{m_2} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_3} .$$

Ecuaţiile (6) pot fi deduse şi prin anularea derivatelor parţiale ale funcţiei $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, deci poziţiile de echilibru ale sistemului corespund valorilor staţionare ale potenţialului forţelor.

Din (6) deducem că putem avea următoarele trei categorii de soluţii:

1° $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$, prin urmare, cele trei puncte coincid.

2° $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 + \pi$, sau alte două soluţii analoge. In acest caz punctele materiale, dintre care două coincid, sînt diametral opuse pe cercul dat.

3° Dacă cea mai mare dintre masele m_i este mai mică decît suma celorlalte două, atunci într-un sistem convenţional de unităţi, există un triunghi cu laturile egale cu cele trei mase. Rezultă că unghiurile triunghiului respectiv sînt

$$\pi - (\theta_2 - \theta_3) , \quad \pi - (\theta_3 - \theta_1), \quad -\pi - (\theta_1 - \theta_2) ,$$

sau alte două combinaţii analoge.

Astfel problema s-a redus la găsirea unghiurilor unui triunghi cînd se cunosc laturile sale. Obţinem

$$(7) \quad \operatorname{tg}\frac{\theta_2 - \theta_3}{2} = \sqrt{\frac{p(p-m_1)}{(p-m_2)(p-m_3)}} , \quad \operatorname{tg}\frac{\theta_3 - \theta_1}{2} = \sqrt{\frac{p(p-m_2)}{(p-m_3)(p-m_1)}} ,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \sqrt{\frac{p(p-m_3)}{(p-m_1)(p-m_2)}} ,$$

unde $2p = m_1 + m_2 + m_3$.

Observaţie. Pentru studiul stabilităţii echilibrului se aplică teorema lui Lejeune-Dirichlet, iar pentru instabilitate echilibrului se aplică teorema lui Leapunov (v.cap.IX).

Din (6) deducem că diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei U este

$$(8)\quad d^2U=\frac{1}{2}kR^2\left[m_1m_2(d\theta_1-d\theta_2)^2\cos(\theta_1-\theta_2)+\right.$$
$$\left.+m_2m_3(d\theta_2-d\theta_3)^2\cos(\theta_2-\theta_3)+m_3m_1(d\theta_3-d\theta_1)^2\cos(\theta_3-\theta_1)\right].$$

Prin urmare, pentru soluţiile din categoria 1°, avem $d^2U>0$, deci U este minimă şi echilibrul este instabil.

Pentru soluţiile de tipul 2° avem

$$d^2U=\frac{1}{2}kR^2\left[m_1m_2(d\theta_1-d\theta_2)^2-m_2m_3(d\theta_2-d\theta_3)^2-m_3m_1(d\theta_3-d\theta_1)^2\right]$$

şi cum $\theta_1-\theta_2=(\theta_1-\theta_3)+(\theta_3-\theta_2)$, putem scrie

$$(9)\quad d^2U=\frac{1}{2}kR^2\left[m_2(m_1-m_3)(d\theta_2-d\theta_3)^2+m_1(m_2-m_3)(d\theta_3-d\theta_1)^2+\right.$$
$$\left.+2m_1m_2(d\theta_2-d\theta_3)(d\theta_3-d\theta_1)\right].$$

Pentru ca echilibrul să fie stabil, trebuie ca U să fie maximă, sau ca d^2U să fie negativă. Aceasta se întîmplă atunci şi numai atunci cînd trinomul în $d\theta_2-d\theta_3$ şi $d\theta_3-d\theta_1$ din (9), are rădăcini complexe, deci

$$m_3>m_1+m_2.$$

Dacă $m_3<m_1+m_2$ poziţia de echilibru este instabilă.

In cazul poziţiilor de echilibru de tipul 3° avem

$$d^2U=\frac{1}{4}kR^2\left[(m_3^2-m_1^2-m_2^2)(d\theta_1-d\theta_2)^2+(m_1^2-m_2^2-m_3^2)(d\theta_2-d\theta_3)^2+\right.$$
$$\left.+(m_2^2-m_3^2-m_1^2)(d\theta_3-d\theta_1)^2\right]=-\frac{1}{2}kR^2\left[m_1^2(d\theta_1-d\theta_2)^2+m_3^2(d\theta_2-d\theta_3)^2+\right.$$
$$\left.+(m_1^2+m_3^2-m_2^2)(d\theta_1-d\theta_2)(d\theta_2-d\theta_3)\right],$$

deci d^2U este negativ dacă şi numai dacă are loc relaţia

$$(m_1+m_2-m_3)(m_2+m_3-m_1)(m_3+m_1-m_2)>0.$$

Este uşor de văzut că în condiţiile de la punctul 3^0 relaţia precedentă este întotdeauna satisfăcută, deci poziţiile de echilibru de tipul 3^0 (cînd există) sînt stabile.

302. Se consideră punctele P_i, $i=\overline{1,4}$, supuse la condiţia că volumul tetraedrului cu aceste vîrfuri este constant. Presupunînd că asupra punctelor P_i acţionează forţele $\bar{F}_i$, să se arate că sistemul celor patru puncte este în echilibru dacă şi numai dacă forţele date sînt perpendiculare pe feţele opuse ale tetraedrului şi proporţionale cu ariile acestora.

Rezolvare. Fie $\bar{r}_i$ vectorii de poziţie ai punctelor P_i faţă de un pol O. Legătura la care este supus sistemul mecanic dat poate fi exprimată prin relaţia

$$(1) \qquad (\bar{r}_4-\bar{r}_1, \bar{r}_4-\bar{r}_2, \bar{r}_4-\bar{r}_3) = \text{const.}$$

Astfel, deplasările virtuale $\delta\bar{r}_i$ ale punctelor sistemului trebuie să verifice egalitatea

$$(2) \quad (\bar{r}_4-\bar{r}_2, \bar{r}_4-\bar{r}_3, \delta\bar{r}_1)+(\bar{r}_4-\bar{r}_3, \bar{r}_4-\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2)+(\bar{r}_4-\bar{r}_1, \bar{r}_4-\bar{r}_2, \delta\bar{r}_3)+ \\ +(\bar{r}_3-\bar{r}_2, \bar{r}_3-\bar{r}_1, \delta\bar{r}_4) = 0 .$$

Pe de altă parte, condiţia de echilibru (15.2) dă

$$(3) \qquad \bar{F}_i \delta\bar{r}_i = 0 ,$$

pentru orice deplasări $\delta\bar{r}_i$ care satisfac (2).

Prin urmare, deducem

$$(4) \begin{cases} \bar{F}_1 = \lambda\left[(\bar{r}_4-\bar{r}_2)\times(\bar{r}_4-\bar{r}_3)\right], & \bar{F}_2 = \lambda\left[(\bar{r}_4-\bar{r}_3)\times(\bar{r}_4-\bar{r}_1)\right], \\ \bar{F}_3 = \lambda\left[(\bar{r}_4-\bar{r}_1)\times(\bar{r}_4-\bar{r}_2)\right], & \bar{F}_4 = \lambda\left[(\bar{r}_3-\bar{r}_2)\times(\bar{r}_3-\bar{r}_1)\right], \end{cases}$$

unde λ este un factor oarecare.

Din (4) rezultă proprietăţile din enunţ.

Observaţie. Dacă se consideră trei puncte legate astfel încît aria triunghiului cu aceste vîrfuri să fie constantă şi presupunem că asupra lor acţionează trei forţe date, atunci

pentru echilibrul sistemului este necesar şi suficient ca aceste forţe să fie în planul triunghiului, perpendiculare pe laturile opuse ale triunghiului şi proporţionale cu lungimile acestora (problema lui C. Neumann).

303. Să se studieze echilibrul unui rigid greu rezemat în trei puncte necoliniare pe un plan orizontal.

Rezolvare. Luăm reperul $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ astfel încît planul $\xi_1\Omega\xi_2$ să coincidă cu planul orizontal pe care se reazimă rigidul, iar axa $\Omega\xi_3$ să fie verticală ascendentă. Fie P_i, $i=1,2,3$, punctele în care rigidul se sprijină pe planul $\xi_1\Omega\xi_2$. Considerăm reperul $Ox_1x_2x_3$ al cărui plan x_1Ox_2 este suprapus planului $\xi_1\Omega\xi_2$ şi are originea O în interiorul triunghiului $P_1P_2P_3$. Vectorii de poziţie ai punctelor P_i îi notăm cu $\bar{\rho}_i$ faţă de polul Ω şi cu $\bar{r}_i$ în raport cu O.

Dacă notăm cu $(x_{i1},x_{i2},0)$ componentele vectorului $\bar{r}_i$ şi presupunem că triunghiul $P_1P_2P_3$ este orientat în sens pozitiv, avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} > 0 ,$$

unde Δ reprezintă dublul ariei triunghiului dat.

Pe de altă parte, punctul O fiind interior triunghiului, deducem

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{11} & x_{12} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 .$$

Legăturile sistemului mecanic dat sînt unilaterale şi se exprimă prin relaţiile

(1) $$\bar{\varepsilon}_3 \, \delta\bar{\rho}_i \geq 0 , \quad i=1,2,3.$$

Formula (15.3) ne arată că deplasările $\delta\bar{\rho}_i$ sînt de forma

$$\delta\bar{\rho}_i = \delta\bar{\rho}_o + (\delta\bar{\chi}) \times \bar{r}_i ,$$

deci, inegalităţile (1) devin

(2) $$\delta h + x_{i2}\,\delta\chi_1 - x_{i1}\,\delta\chi_2 \geq 0, \quad i=1,2,3,$$

unde $\delta h = \bar{\varepsilon}_3\,\delta\bar{\rho}_o$ şi $\delta\chi_\alpha = \bar{e}_\alpha \delta\bar{\chi}$, $\alpha = 1,2.$

Prin urmare, deplasările virtuale compatibile cu legăturile trebuie să satisfacă inegalităţile (2).

Cu ajutorul notaţiilor

(3) $$-\pi_i = \delta h + x_{i2}\,\delta\chi_1 - x_{i1}\,\delta\chi_2 , \quad i=1,2,3,$$

legăturile sistemului se reprezintă prin

(4) $$\pi_i \leq 0 , \quad i=1,2,3.$$

Sistemul (3) este echivalent cu

(5) $$\begin{cases} \delta h = -\dfrac{\Delta_i}{\Delta}\,\pi_i , \quad i=1,2,3, \\ \delta\chi_1 = \dfrac{1}{\Delta}\left[(x_{21}-x_{31})\pi_1 + (x_{31}-x_{11})\pi_2 + (x_{11}-x_{21})\pi_3\right], \\ \delta\chi_2 = \dfrac{1}{\Delta}\left[(x_{22}-x_{32})\pi_1 + (x_{32}-x_{12})\pi_2 + (x_{12}-x_{22})\pi_3\right]. \end{cases}$$

Deoarece forţele active sînt echivalente cu forţa de greutate aplicată în centrul de masă al rigidului, relaţia (15.4) conduce la

(6) $$\delta h + (\delta\bar{\chi}, \bar{r}^*, \bar{\varepsilon}_3) \geq 0 ,$$

în care $\bar{r}^*$ este vectorul de poziţie al centrului de masă faţă de O. Forma explicită a inegalităţii (6) este

(6') $$\delta h + x_2^*\,\delta\chi_1 - x_1^*\,\delta\chi_2 \geq 0 .$$

Dacă facem notaţiile

$$\Delta_1^* = \begin{vmatrix} 1 & x_1^* & x_2^* \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} , \quad \Delta_2^* = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_1^* & x_2^* \\ 1 & x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} , \quad \Delta_3^* = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_1^* & x_2^* \end{vmatrix} ,$$

avem $\Delta = \Delta_1^* + \Delta_2^* + \Delta_3^* .$

iar din (5) şi (6') deducem că pentru echilibru este necesar şi suficient să avem

(7) $$\Delta_i^* \bar{\pi}_i \leq 0 \quad , \quad i=1,2,3,$$

oricare ar fi $\bar{\pi}_i$ care verifică (4).

Relaţia (7) este satisfăcută dacă şi numai dacă

(8) $$\Delta_i^* \geq 0 \quad , \quad i=1,2,3.$$

Condiţiile de echilibru (8) exprimă faptul că centrul de masă al rigidului se proiectează în interiorul sau pe laturile triunghiului de sprijin, deoarece triunghiurile $Q^*P_2P_3$, $P_1Q^*P_3$, $P_1P_2Q^*$, unde Q^* este proiecţia centrului de masă pe planul x_1Ox_2, sînt orientate în sens direct.

Să determinăm acum forţele de legătură. În baza principiului eliberării putem înlocui legăturile celor trei puncte cu forţele de legătură $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3$, aplicate respectiv în punctele P_1, P_2, P_3. Principiul lucrului mecanic virtual arată că trebuie

(9) $$\bar{L}_i \delta \bar{r}_i \geq 0 \quad \text{(nesumat)} \, ,$$

ori de cîte ori au loc inegalităţile (1). Atunci deducem

(10) $$\bar{L}_i = L_i \bar{\varepsilon}_3 \quad , \quad L_i \geq 0 \, ,$$

deci, forţele de legătură sînt verticale şi orientate ascendent.

Prin introducerea forţelor de legătură solidul dat poate fi considerat ca un rigid liber, prin urmare, pentru echilibru este necesar şi suficient să avem

(11) $$\begin{cases} \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \bar{L}_3 + M\bar{g} = 0 \, , \\ \bar{r}_1 \times \bar{L}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{L}_2 + \bar{r}_3 \times \bar{L}_3 + M(\bar{r}^* \times \bar{g}) = 0 \, . \end{cases}$$

Avînd în vedere (10), sistemul (11) devine

(12) $$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 - Mg = 0 \, , \\ (\bar{r}_1 L_1 + \bar{r}_2 L_2 + \bar{r}_3 L_3 - Mg\bar{r}^*) \times \bar{\varepsilon}_3 = 0 \, , \end{cases}$$

sau, pe componente

$$(12') \qquad \begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = Mg \,, \\ x_{11}L_1 + x_{21}L_2 + x_{31}L_3 = Mgx_1^* \,, \\ x_{12}L_1 + x_{22}L_2 + x_{32}L_3 = Mgx_2^* \,. \end{cases}$$

Rezultă că dacă se cunosc coordonatele punctelor de sprijin şi ale proiecţiei centrului de masă, din sistemul (12') putem determina în mod unic pe L_1, L_2, L_3. Se obţine

$$(13) \qquad L_i = Mg \frac{\Delta_i^*}{\Delta} \,, \quad i = 1,2,3.$$

Observaţie. Condiţiile de echilibru (2) şi (6) pot fi interpretate şi pe altă cale. In acest scop să considerăm baza formată cu vectorii $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\varepsilon}_3$. Astfel putem scrie

$$(14) \qquad \bar{r}^* = p_\alpha \bar{r}_\alpha + k\,\bar{\varepsilon}_3 \,, \quad \alpha = 1,2$$

şi inegalitatea (6) devine

$$(15) \qquad \delta h + p_\alpha (x_{\alpha 2}\,\delta\chi_1 - x_{\alpha 1}\,\delta\chi_2) \geqslant 0 \,, \quad \alpha = 1,2 \,.$$

Avînd în vedere faptul că sistemul (3) conduce la

$$\begin{cases} x_{i2}\,\delta\chi_1 - x_{i1}\,\delta\chi_2 = \left(\frac{\Delta_j}{\Delta} - \delta_{ij}\right)\bar{\pi}_j \,, \\ \delta h = -\frac{\Delta_i}{\Delta}\bar{\pi}_i \,, \quad i,j = 1,2,3, \end{cases}$$

din (15) deducem

$$(16) \qquad \left[p_\alpha(\Delta_i - \Delta\,\delta_{\alpha i}) - \Delta_i\right]\bar{\pi}_i \geqslant 0 \,, \quad \alpha = 1,2; \; i=1,2,3,$$

oricare ar fi $\bar{\pi}_i$ care verifică (4).

Condiţia (16) este satisfăcută atunci şi numai atunci cînd avem

$$(17) \qquad p_\alpha(\Delta_i - \Delta\,\delta_{\alpha i}) - \Delta_i \leqslant 0 \,,$$

sau, dezvoltat

$$(17') \qquad \begin{cases} -(\Delta_2 + \Delta_3)p_1 + \Delta_1 p_2 - \Delta_1 \leqslant 0 \,, \\ \Delta_2 p_1 - (\Delta_3 + \Delta_1)p_2 - \Delta_2 \leqslant 0 \,, \\ p_1 + p_2 - 1 \leqslant 0 \,. \end{cases}$$

Pentru a interpreta inegalităţile (17') să scriem ecuaţiile laturilor triunghiului $P_1P_2P_2$. Mai întîi punem

$$\bar{r}_3 = \lambda_1 \bar{r}_1 + \lambda_2 \bar{r}_2 ,$$

sau

$$x_{3\alpha} = \lambda_1 x_{1\alpha} + \lambda_2 x_{2\alpha} \quad , \quad \alpha = 1,2,$$

de unde obţinem

$$\lambda_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta_3} , \quad \lambda_2 = -\frac{\Delta_2}{\Delta_3} .$$

Astfel coordonatele vîrfurilor triunghiului dat faţă de baza $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ sînt $P_1(1,0), P_2(0,1), P_3(-\frac{\Delta_1}{\Delta_3}, -\frac{\Delta_2}{\Delta_3})$. Dacă notăm cu η_1, η_2 coordonatele unui punct din planul triunghiului $P_1P_2P_3$, atunci ecuaţia unei drepte este de forma

$$A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_o = 0 ,$$

unde A_1, A_2, A_o sînt constante.

Rezultă că laturile triunghiului au respectiv ecuaţiile

(P_2P_3) $$-(\Delta_2 + \Delta_3)\eta_1 + \Delta_1\eta_2 - \Delta_1 = 0 ,$$

(P_3P_1) $$\Delta_2\eta_1 - (\Delta_3 + \Delta_1)\eta_2 - \Delta_2 = 0 ,$$

(P_1P_2) $$\eta_1 + \eta_2 - 1 = 0 .$$

Prin urmare, condiţiile de echilibru (17') exprimă faptul că proiecţia centrului de masă al rigidului pe planul x_1Ox_2 este de aceeaşi parte a fiecăreia dintre laturile triunghiului $P_1P_2P_3$ ca şi originea O .

In ceea ce priveşte forţele de legătură, din (12') şi (14) găsim

$$(18) \quad \begin{cases} L_1 = \left[(\Delta_2 + \Delta_3)p_1 - \Delta_1 p_2 + \Delta_1\right] \frac{Mg}{\Delta} , \\ L_2 = \left[-\Delta_2 p_1 + (\Delta_3 + \Delta_1)p_2 + \Delta_2\right] \frac{Mg}{\Delta} , \\ L_3 = (1 - p_1 - p_2) \frac{Mg\Delta_3}{\Delta} . \end{cases}$$

Se observă că în baza relaţiilor (17') expresiile lui L_1, L_2, L_3 date de (18) sînt nenegative .

304. Să se afle poziţia de echilibru a unei bare grele şi omogene ale cărei extremităţi A şi B se sprijină, fără frecare,

pe două plane care fac unghiurile α și β cu un plan orizontal.

Rezolvare. Notăm cu M masa barei și cu C centrul său de greutate. Deoarece bara este omogenă, punctul C coincide cu mijlocul ei. Bara dată este solicitată de greutatea sa $M\bar{g}$ aplicată în punctul C și de forțele de legătură $\bar{L}_A$ și $\bar{L}_B$ normale la cele două plane în punctele A și B respectiv.

Prin introducerea forțelor de legătură bara dată poate fi considerată ca un rigid liber. Prin urmare, pentru echilibrul barei este necesar și suficient ca rezultanta celor trei forțe să fie nulă și momentul rezultant al lor în raport cu un punct oarecare să fie nul. Dacă luăm momentul rezultant în raport cu punctul A, avem

$$(1) \qquad \bar{L}_A + \bar{L}_B + M\bar{g} = 0 \ , \quad \vec{AB} \times \bar{L}_A + M(\vec{AC} \times \bar{g}) = 0 \ .$$

Din $(1)_1$ deducem că vectorii $\bar{L}_A, \bar{L}_B$ și $\bar{g}$, avînd punctele de aplicație coliniare, sînt situați într-un plan vertical pe care îl notăm cu (π). Cum planul (π) conține normalele planelor date, el este normal pe intersecția lor, care este, așadar, orizontală. De asemenea, bara avînd extremitățile în planul (π), ea este conținută în acest plan. Fie OA și OB dreptele după care planul (π) taie cele două plane date (v. fig. 31). Considerăm reperul x_1Ox_2 format din axa orizontală Ox_1 și axa verticală ascendentă Ox_2. Avem un sistem mecanic cu un grad de libertate. Poziția barei o putem determina cu ajutorul unghiului φ pe care ea îl face cu axa Ox_1. Rezultă

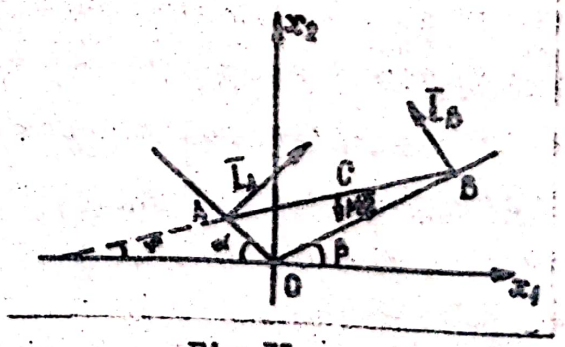

Fig. 31

$$\begin{cases} \bar{L}_A = L_A(\bar{e}_1 \sin\alpha + \bar{e}_2 \cos\alpha), \quad \bar{L}_B = L_B(-\bar{e}_1 \sin\beta + \bar{e}_2 \cos\beta), \\ \overrightarrow{AC} = AC(\bar{e}_1 \cos\varphi + \bar{e}_2 \sin\varphi), \quad \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}, \end{cases}$$

astfel încît ecuaţiile (1) dau

$$(2) \qquad \begin{cases} L_A \sin\alpha - L_B \sin\beta = 0, \\ L_A \cos\alpha + L_B \cos\beta = Mg, \\ 2L_A \cos(\varphi + \alpha) - Mg \cos\varphi = 0. \end{cases}$$

Sistemul (2) conduce la

$$(3) \qquad L_A = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} Mg, \quad L_B = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} Mg$$

şi

$$(4) \qquad 2\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta.$$

Observaţie. Pentru deducerea ecuaţiei (4), care determină poziţia de echilibru a barei, putem utiliza direct relaţia (15.2). In cazul de faţă legăturile sînt bilaterale şi condiţia (15.2) se reduce la

$$(5) \qquad \delta(M\bar{g}\,\bar{\rho}^*) = 0, \quad \bar{\rho}^* = \overrightarrow{OC},$$

care trebuie să aibă loc pentru orice $\delta\varphi$.

Dacă observăm că în triunghiul OAB avem

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{OA} = \frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB},$$

obţinem

$$(6) \qquad \begin{cases} \bar{\rho}^* = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\sin(\alpha+\beta)}\Big[(\cos\beta\sin(\alpha+\varphi) - \cos\alpha\sin(\beta-\varphi))\bar{e}_1 + \\ \quad + (\sin\beta\sin(\alpha+\varphi) + \sin\alpha\sin(\beta-\varphi))\bar{e}_2\Big]. \end{cases}$$

Inlocuind pe $\bar{\rho}^*$ din (6) în (5) regăsim ecuaţia (4).

305. O placă pătrată OABC rigidă, omogenă şi grea, este suspendată de un punct Ω cu un fir inextensibil, fără masă şi de lungime egală cu latura pătratului. Firul este legat de vîrful C al plăcii, iar placa se sprijină cu vîrful O pe un perete vertical lucios şi care trece prin Ω (v.fig.32). Să

se afle poziţia de echilibru şi forţele de legătură.

Rezolvare. Notăm cu a latura pătratului şi cu M masa plăcii. Din faptul că placa este omogenă rezultă că centrul de masă al său P^* coincide cu centrul pătratului. Forţa activă care acţionează asupra rigidului este greutatea sa $M\bar{g}$ aplicată în punctul P^*. Putem elibera rigidul de legături prin introducerea a două forţe de legătură şi anume: tensiunea $\bar{T}$ a firului coliniară cu vectorul $\overrightarrow{C\Omega}$ şi reacţiunea $\bar{L}$ a peretelui care este normală acestuia în punctul O.

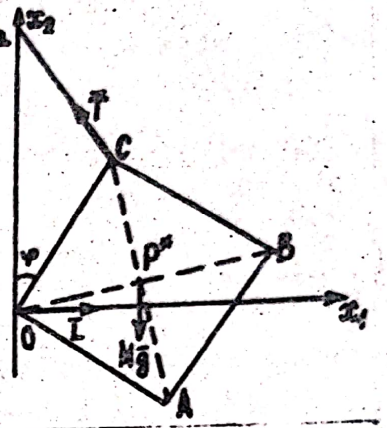

Fig.32

Condiţia necesară şi suficientă de echilibru este ca rezultanta celor trei forţe să fie nulă şi momentul rezultant al lor în raport cu un punct oarecare să fie nul. Astfel putem scrie

(1) $$\bar{T} + \bar{L} + M\bar{g} = 0 , \quad \overrightarrow{OC} \times \bar{T} + M(\overrightarrow{OP^*} \times \bar{g}) = 0 .$$

Din ecuaţia $(1)_1$ deducem că poziţia de echilibru se află într-un plan vertical care trece prin Ω. Luăm reperul x_1Ox_2 format din axa orizontală Ox_1 şi axa verticală ascendentă Ox_2. Acest sistem mecanic are un grad de libertate şi poziţia sa poate fi determinată cu ajutorul unghiului φ pe care îl face latura OC cu axa Ox_2. Avem

$$\begin{cases} \bar{T} = T(-\bar{e}_1 \sin\varphi + \bar{e}_2 \cos\varphi), \ \bar{L} = L\bar{e}_1, \ \bar{g} = -g\bar{e}_2 , \\ \overrightarrow{OC} = a(\bar{e}_1 \sin\varphi + \bar{e}_2 \cos\varphi) , \\ \overrightarrow{OP^*} = \frac{a}{2}\left[(\sin\varphi + \cos\varphi)\bar{e}_1 + (\cos\varphi - \sin\varphi)\bar{e}_2\right] , \end{cases}$$

prin urmare, ecuaţiile (1) conduc la

$$\begin{cases} L - T\sin\varphi = 0 , \quad T\cos\varphi - Mg = 0 , \\ 2T \sin 2\varphi - Mg(\sin\varphi + \cos\varphi) = 0 , \end{cases}$$

de unde

(2) $\qquad tg\varphi = \frac{1}{3}\,, \quad L = \frac{Mg}{3}\,, \quad T = \frac{\sqrt{10}}{3} Mg\,.$

Observaţia. Ecuaţia $(2)_1$, care determină poziţia de echilibru a plăcii, poate fi dedusă direct din relaţia (15.2). In acest scop să calculăm lucrul mecanic elementar al forţelor de greutate. Avem

$$\delta\mathcal{L} = \int_D (\delta\bar{\rho})\bar{g}\,dm = \delta(M\bar{g}\,\bar{\rho}^*)\,,$$

deci, există o funcţie de forţe şi are forma

$$U = M\bar{g}\bar{\rho}^*\,.$$

Avînd în vedere că

$$\bar{\rho}^* = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OP}^* = -2a\bar{e}_2\cos\varphi + \frac{a}{2}\left[(\sin\varphi + \cos\varphi)\bar{e}_1 + (\cos\varphi - \sin\varphi)e_2\right]\,,$$

rezultă

$$U = \frac{1}{2} Mga(3\cos\varphi + \sin\varphi)\,.$$

Ecuaţia $(2)_1$ exprimă faptul că $U'(\varphi) = 0$.

Se constată uşor că poziţia de echilibru găsită este stabilă.

De asemenea, pentru calculul lui $\delta\mathcal{L}$ putem folosi expresia (15.3) a lui $\delta\bar{\rho}$, unde punem $\bar{\rho}_0 = -2a\bar{e}_2\cos\varphi$, $\delta\bar{\chi} = \bar{e}_3\delta\chi$, iar în rezultat îl înlocuim pe $\bar{r}^*$ prin $\overrightarrow{OC}^*$.

306. O placă pătrată $OABC$ rigidă, omogenă şi grea, se poate roti într-un plan vertical în jurul punctului O (v. fig. 33). Vîrful C al pătratului este legat prin mijlocirea unui fir flexibil, inextensibil şi fără masă, trecut peste un scripete fix Ω, de dimensiuni neglijabile de o greutate reprezentată prin punctul material Q. Presupunînd că scripetele Ω este aşezat pe aceeaşi verticală cu O, deasupra lui O, la distanţe de acesta egală cu latura pătratului şi că raportul dintre greutatea plăcii şi greutatea Q este $\sqrt{2}$, să se afle poziţiile de echilibru.

Rezolvare. Notăm cu a latura pătratului şi cu l lungimea firului $C\Omega Q$. Centrul de masă P^* al plăcii coincide cu punctul de intersecţie al diagonalelor pătratului. Luăm reperul

x_1Ox_2 cu axa Ox_1 orizontală, iar axa Ox_2 verticală ascendentă.

Sistemul mecanic dat are un grad de libertate şi poziţia lui este complet determinată de unghiul φ pe care îl face latura OC cu axa Ox_2 ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

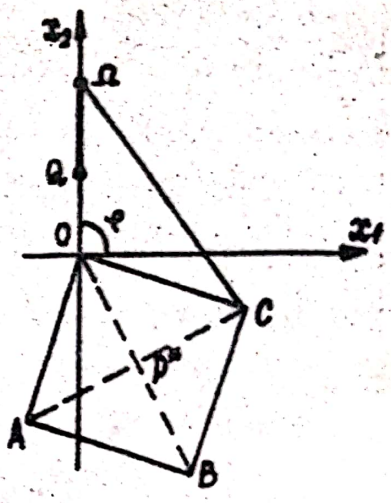

Fig.33

Lucrul mecanic elementar al forţelor active care acţionează asupra sistemului are expresia

$$(1)\quad \delta\mathcal{L} = \delta\left(-\frac{Mg}{\sqrt{2}}\,\bar{e}_2\cdot\overrightarrow{\Omega Q} - Mg\bar{e}_2\bar{r}^*\right) = \delta\left(-\frac{Mg}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OQ} - Mg\bar{e}_2\cdot\overrightarrow{OP}^*\right).$$

Deoarece avem

$$\overrightarrow{OQ} = a - (\ell - 2a\sin\frac{\varphi}{2}),\quad \bar{e}_2\cdot\overrightarrow{OP}^* = -\frac{a}{\sqrt{2}}\cos(\frac{3\pi}{4} - \varphi),$$

rezultă

$$(1')\quad \delta\mathcal{L} = \delta\left\{\frac{Mg}{\sqrt{2}}\left[a\sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) - 2a\sin\frac{\varphi}{2} - a + \ell\right]\right\}.$$

Prin urmare, forţele active sînt conservative şi potenţialul lor este de forma

$$(2)\quad U(\varphi) = \frac{Mag}{\sqrt{2}}\left[\sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) - 2\sin\frac{\varphi}{2}\right].$$

Primele două derivate ale funcţiei $U(\varphi)$ au respectiv expresiile

$$(3)\quad U'(\varphi) = \frac{Mag}{\sqrt{2}}\left[\cos(\varphi - \frac{\pi}{4}) - \cos\frac{\varphi}{2}\right],$$

$$(4)\quad U''(\varphi) = \frac{Mag}{\sqrt{2}}\left[-\sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right].$$

Condiţia de echilibru (15.2) revine la $U'(\varphi) = 0$, deci avem

$$(5)\quad \cos(\varphi - \frac{\pi}{4}) - \cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Din (5) găsim două poziţii de echilibru şi anume :

$$(6)\quad \varphi_1 = \frac{\pi}{6},\quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Pentru valorile lui φ găsite mai sus, obţinem

$$U''(\varphi_1) = \frac{3Mag}{2\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{12} > 0 \ , \ U''(\varphi_2) = -\frac{Mag}{2\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{4} < 0 \ ,$$

de unde rezultă că poziţia de echilibru corespunzătoare lui φ_1 este instabilă, iar aceea corespunzătoare lui φ_2 este stabilă.

Observaţie. Problema este posibilă numai dacă are loc relaţia $\ell > a\sqrt{2}$.

302. O jumătate de disc rigid, greu şi omogen este suspendat de un punct Ω cu un fir inextensibil şi fără masă. Firul este fixat la extremitatea B a diametrului care mărgineşte jumătatea de disc, iar rigidul se sprijină pe un perete vertical luciu şi care trece prin Ω (v.fig.34). Să se afle poziţia de echilibru şi forţele de legătură.

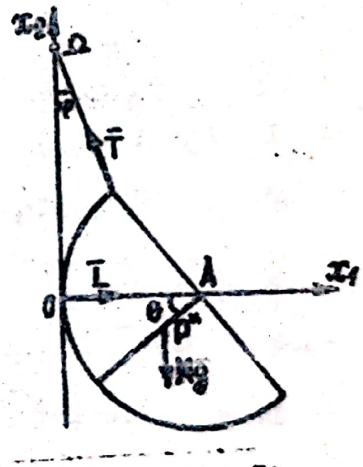

Fig.34

Rezolvare. Fie R raza discului şi ℓ lungimea firului. Forţa activă care acţionează asupra rigidului dat este greutatea proprie $M\bar{g}$ aplicată în centrul de masă. Dacă notăm cu A centrul discului şi cu P^* centrul de masă al jumătăţii de disc, avem

(1) $\overline{AP^*} = \frac{4R}{3\pi}$, (v.problema 239, formula (4)).

Putem elibera solidul dat de legături prin introducerea a două forţe de legătură şi anume: tensiunea $\bar{T}$ a firului coliniară cu vectorul $\overline{B\Omega}$ şi reacţiunea $\bar{L}$ a peretelui care este normală acestuia în O .

Pentru echilibru deducem

(2) $\quad \bar{T} + \bar{L} + M\bar{g} = 0 \ , \quad \overrightarrow{AB} \times \bar{T} + M(\overrightarrow{AP''} \times \bar{g}) = 0 \ .$

Din ecuaţia $(2)_1$ rezultă că poziţia de echilibru se află într-un plan vertical care trece prin Ω . Alegem reperul x_1Ox_2 a cărui axă Ox_1 este orizontală şi trece prin A, iar Ox_2 este verticală ascendentă şi trece prin Ω . Avem un sistem mecanic cu un grad de libertate. Luăm ca parametru unghiul φ pe care îl face dreapta ΩB cu verticala. Dacă notăm cu θ unghiul dintre $\overrightarrow{P''A}$ şi axa Ox_1, atunci faptul că rigidul se sprijină pe peretele vertical se exprimă prin relaţia

(3) $\quad \ell \sin\varphi + R \sin\theta = R \ .$

Avînd în vedere că

$$\begin{cases} \bar{T} = T(-\bar{e}_1 \sin\varphi + \bar{e}_2 \cos\varphi), \ \overrightarrow{AB} = R(-\bar{e}_1 \sin\theta + \bar{e}_2 \cos\theta) \ , \\ \overrightarrow{AP''} = -\dfrac{4R}{3\pi}(\bar{e}_1 \cos\theta + \bar{e}_2 \sin\theta) \ , \end{cases}$$

ecuaţiile (2) conduc la

(4) $$T = \frac{Mg}{\cos\varphi} \ , \quad L = Mg \operatorname{tg}\varphi \ ,$$

(5) $$4 \cos\theta \cos\varphi = 3\pi \sin(\theta - \varphi) \ .$$

Ecuaţiile (3)-(5) permit aflarea lui φ, θ, T şi L. E de observat că pentru echilibru este necesar ca $\theta > \varphi$.

308. Se consideră o cupă avînd forma unei semisfere de rază R, cu axa verticală. O bară rigidă AB de lungime 2ℓ, omogenă şi de greutate G se reazemă, fără frecare, în A pe interiorul cupei şi în C pe marginea cupei (v.fig.35). Să se afle poziţia de echilibru a barei şi forţele de legătură.

Rezolvare. Forţa activă care acţionează asupra barei AB este greutatea $\bar{G}$ aplicată în mijlocul P^* al barei. Putem elibera bara de legături prin introducerea a două forţe de legătură: reacţiunile $\bar{L}_A$ a cupei asupra extremităţii A şi $\bar{L}_C$ asupra punctului C. Vectorul $\bar{L}_A$ este dirijat spre centrul O al sferei, iar $\bar{L}_C$ este

normal la AB. Intr-o poziţie de echilibru sistemul celor trei vectori $\bar{L}_A, \bar{L}_C$ şi $\bar{G}$ este echivalent cu zero, deci putem scrie

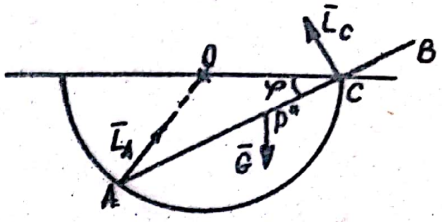

Fig.35

$$(1)\begin{cases} \bar{L}_A+\bar{L}_C+\bar{G} = 0 , \\ \overline{CA}\times\bar{L}_A + \overline{CP^*}\times\bar{G} = 0 . \end{cases}$$

Din $(1)_1$ rezultă că vectorii $\bar{L}_A, \bar{L}_C$ şi $\bar{G}$ sînt coplanari, prin urmare, bara poate fi în echilibru numai într-unul din planele verticale şi diametrale ale cupei sferice: în planul diametral se află forţa $\bar{L}_A$, iar în cel vertical forţa $\bar{G}$. Poziţia barei este complet determinată de unghiul $\sphericalangle OCA = \varphi$.

Dacă proiectăm ecuaţiile (1) pe direcţia barei AB şi pe direcţia perpendiculară acesteia, obţinem

$$\begin{cases} L_A\cos\varphi - G\sin\varphi = 0 , \\ L_A\sin\varphi + L_C - G\cos\varphi = 0 , \\ 2RL_A\cos\varphi\sin\varphi - (2R\cos\varphi - \ell)G\cos\varphi = 0 , \end{cases}$$

de unde rezultă

$$(2) \qquad L_A = G\,\mathrm{tg}\varphi , \quad L_C = G\,\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} ,$$

$$(3) \qquad 4R\cos^2\varphi - \ell\cos\varphi - 2R = 0 .$$

Din (3) deducem

$$(4) \qquad \cos\varphi = \frac{\ell + \sqrt{\ell^2+32R^2}}{8R}$$

şi, ţinînd seama de condiţia evidentă $\overline{AB} \geq \overline{AC}$, găsim

$$R\sqrt{\tfrac{2}{3}} \leq \ell \leq 2R , \text{ sau } \ell \leq 2R \leq \ell\sqrt{6} .$$

Dacă $\ell = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, capătul B al barei este în C şi $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\varphi = 35^0 16' 10''$. Dacă $\ell = 2R$ bara stă în echilibru instabil, punctul P^* fiind chiar în C .

309. Se consideră o semisferă rigidă, omogenă şi grea aşezată cu partea convexă pe un plan orizontal. De marginea semisferei atîrnă greutatea Q. Să se afle poziţia de echilibru.

Rezolvare. Fie R raza semisferei şi O centrul bazei sale. Notăm cu M masa semisferei şi cu P^* centrul său de masă. Punctul P^* se află pe axa de simetrie a semisferei la distanţa $\frac{3}{8}R$ de centrul ei (v. problema 244), deci avem

(1) $$\overline{OP^*} = \frac{3}{8}R .$$

Asupra semisferei acţionează greutatea sa $M\bar{g}$ aplicată în punctul P^*, greutatea $\bar{Q}$ aplicată în punctul B şi reacţiunea normală a planului $\bar{L}$ aplicată în punctul de tangenţă A cu semisfera (v. fig. 36).

Poziţia semisferei este complet determinată de unghiul φ pe care îl face axa de simetrie a semisferei cu direcţia verticală. Condiţia de echilibru se poate exprima prin relaţiile

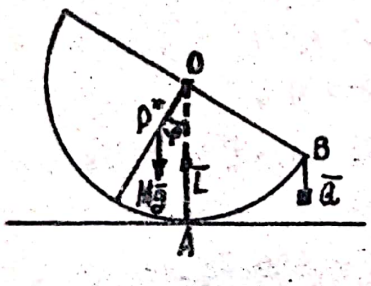

Fig. 36

(2) $\bar{L}+M\bar{g}+\bar{Q}=0$, $\overrightarrow{OP^*}\times(M\bar{g})+\overrightarrow{OB}\times\bar{Q}=0$.

Dacă luăm reperul x_1Ox_2 cu axa Ox_1 verticală descendentă, iar axa Ox_2 orizontală, avem

$$\overrightarrow{OP^*} = \frac{3}{8}R(\bar{e}_1\cos\varphi - \bar{e}_2\sin\varphi), \quad \overrightarrow{OB} = R(\bar{e}_1\sin\varphi + \bar{e}_2\cos\varphi) .$$

Astfel, ecuaţia $(2)_1$ este echivalentă cu

(3) $$L = Mg + Q ,$$

iar ecuaţia $(2)_2$ conduce la

(4) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{8}{3}\cdot\frac{Q}{Mg} .$$

310. In jurul unui disc rigid de rază R, omogen și greu este trecut un fir elastic. Lungimea firului cînd nu este întins (lungimea inițială) este $\ell_0 = 2\pi R$. Se fixează firul într-un cui, discul rămînînd atîrnat de fir. Să se afle poziția de echilibru.

Rezolvare. Fie M masa discului. Notăm cu O centrul discului și cu Ω poziția cuiului (v.fig.37). Deoarece discul este presupus omogen centrul său de masă coincide cu O. Asupra discului acționează greutatea sa $M\bar{g}$ aplicată în O și tensiunile firului $\bar{T}_A$ și $\bar{T}_B$ care sînt tangente la disc în punctele A și B respectiv.

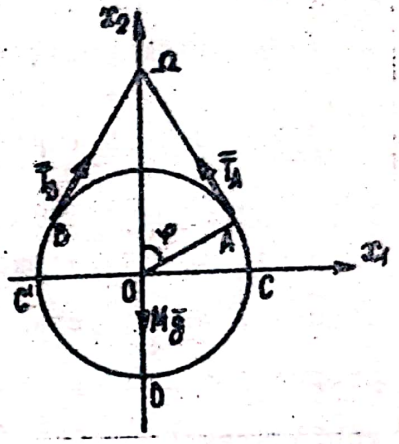

Fig.37

Pentru echilibru este necesar și suficient să avem

(1) $$\bar{T}_A + \bar{T}_B + M\bar{g} = 0, \quad \overrightarrow{OA} \times \bar{T}_A + \overrightarrow{OB} \times \bar{T}_B = 0 .$$

Poziția de echilibru a discului este complet determinată de unghiul φ pe care îl face raza $\overrightarrow{OA}$ cu verticala ascendentă. Dacă luăm reperul x_1Ox_2 cu axa Ox_1 orizontală, iar Ox_2 verticală ascendentă, avem

(2) $$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = R(\bar{e}_1 \sin\varphi + \bar{e}_2 \cos\varphi), \ \overrightarrow{OB} = R(-\bar{e}_1 \sin\varphi + \bar{e}_2 \cos\varphi), \\ \bar{T}_A = T_A(-\bar{e}_1 \cos\varphi + \bar{e}_2 \sin\varphi), \ \bar{T}_B = T_B(\bar{e}_1 \cos\varphi + \bar{e}_2 \sin\varphi). \end{cases}$$

Ecuațiile (1) și (2) conduc la

(3) $$T_A = T_B, \quad T = \frac{Mg}{2\sin\varphi},$$

în care am notat prin T mărimea comună a tensiunilor $\bar{T}_A$ și $\bar{T}_B$.

Pe de altă parte, firul fiind presupus elastic, tensiunea T este proporțională cu alungirea firului (v.și problema 275), adică

(4) $$T = k(\ell - \ell_0),$$

în care ℓ este lungimea firului în poziţia de echilibru, iar k este o constantă pozitivă.

Lungimea alungită ℓ a firului este dată de

(5) $\quad \ell = \overset{\frown}{CDC'} + 2(\overset{\frown}{CA} + \overline{A\Omega}) = 2R(\pi - \varphi + \operatorname{tg}\varphi)$,

prin urmare, găsim

(4') $\quad T = 2kR(\operatorname{tg}\varphi - \varphi)$.

Din $(3)_2$ şi (4') obţinem ecuaţia

$$(\operatorname{tg}\varphi - \varphi)\sin\varphi = \frac{Mg}{4kR},$$

de unde aflăm poziţia de echilibru.

3.11. O bară rigidă AB, omogenă şi grea se sprijină, fără frecare, cu extremitatea A pe axa orizontală fixă Ox_1 şi cu extremitatea B pe axa verticală descendentă Ox_2, iar fiecare particulă a barei este atrasă de punctul O proporţional cu masa şi invers proporţional cu pătratul distanţei. Să se afle poziţiile de echilibru.

Rezolvare. Notăm cu 2ℓ lungimea barei şi cu ρ masa specifică a sa . Centrul de masă P^* al barei coincide cu mijlocul segmentului AB . Acest sistem mecanic are un grad de libertate. Luăm ca parametru unghiul φ pe care îl face vectorul $\overrightarrow{OP^*}$ cu axa Ox_2. Asupra barei AB acţionează patru forţe şi anume: greutatea barei $M\bar{g}$ aplicată în punctul $P^*(M=2\ell\rho)$, rezultanta atracţiilor punctului O pe care o notăm cu $\bar{F}$, forţa de legătură $\bar{L}_A$ normală axei Ox_1 în punctul A şi forţa de legătură $\bar{L}_B$ normală axei Ox_2 în punctul B .

Pentru a calcula rezultanta $\bar{F}$ considerăm un punct oarecare P al barei şi punem $\overrightarrow{P^*P} = \lambda$, $\lambda \in (-\ell, \ell)$, sensul pozitiv pe bară fiind ales de la A la B. Avem

(1) $\quad \bar{r} = \overrightarrow{OP} = (\ell - \lambda)\bar{e}_1\sin\varphi + (\ell + \varphi)\bar{e}_2\cos\varphi$

şi

$$(2) \qquad \overline{OP}^2 = (\lambda + \ell\cos 2\varphi)^2 + \ell^2\sin^2 2\varphi \ .$$

Prin urmare, deducem

$$(3) \quad \bar{F} = -k\rho \int_{\ell}^{\ell} \frac{(\ell-\lambda)\bar{e}_1\sin\varphi + (\ell+\lambda)\bar{e}_2\cos\varphi}{\left[(\lambda+\ell\cos 2\varphi)^2 + \ell^2\sin^2 2\varphi\right]^{3/2}}\, d\lambda \ .$$

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$\lambda = \ell\sin 2\varphi\, \mathrm{tg}\, u - \ell\cos 2\varphi \ ,$$

atunci relaţia (3) devine

$$(3') \quad \bar{F} = -\frac{k\rho}{\sin 2\varphi} \int_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \Big[(\cos\varphi - \sin\varphi\, \mathrm{tg}\, u)\bar{e}_1 +$$

$$+ (\sin\varphi + \cos\varphi\, \mathrm{tg}\, u)\bar{e}_2\Big]\cos u\, du \ .$$

Astfel găsim

$$(4) \qquad \bar{F} = -\frac{k\rho}{\sin 2\varphi}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \ .$$

Aşadar, forţa $\bar{F}$ este situată pe bisectoarea unghiului x_1Ox_2 este orientată spre origine şi se aplică în punctul de intersecţie al bisectoarei respective cu segmentul AB .

Deoarece momentul rezultant în raport cu punctul O al acţiunilor punctului O este nul, rezultă că ecuaţiile de echilibru se pot scrie sub forma

$$(5) \quad \bar{L}_A + \bar{L}_B + \bar{F} + M\bar{g} = 0 \ , \quad \overrightarrow{OA} \times \bar{L}_A + \overrightarrow{OB} \times \bar{L}_B + M(\overrightarrow{OP} \times \bar{g}) = 0 \ .$$

Relaţiile (5) conduc la

$$(6) \quad \begin{cases} L_B - \dfrac{k\rho}{\sin 2\varphi} = 0 \ , & L_A - \dfrac{k\rho}{\sin 2\varphi} + Mg = 0 \ , \\ 2L_A\sin\varphi - 2L_B\cos\varphi + Mg\sin\varphi = 0 \ . \end{cases}$$

Eliminînd pe L_A şi L_B din (6) obţinem ecuaţia

$$(7) \qquad \cos\varphi\sin^2\varphi + \frac{k}{2\ell^2 g}(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \ ,$$

de unde se determină unghiul φ .

Observaţie. Ecuaţia (7) admite totdeauna o rădăcină în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$. Această afirmaţie se verifică uşor studiind variaţia funcţiei

$$\frac{\sin\varphi - \cos\varphi}{\cos\varphi \sin^2\varphi},$$

care creşte de la $-\infty$ la $+\infty$ cînd φ creşte de la 0 la $\frac{\pi}{2}$.

312. Fiind dat un reper cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$ a cărui axă Ox_3 este verticală ascendentă, se consideră o bară rigidă OA de lungime a, omogenă şi de greutate $2a$. Extremitatea O a barei este articulată în originea reperului, iar extremitatea A este atrasă de un centru fix B din planul x_1Ox_2 cu o forţă care se reprezintă prin vectorul $\vec{AB}$. Să se afle poziţiile de echilibru ale barei OA.

Rezolvare. Acest sistem mecanic are două grade de libertate. Notăm cu $\bar{u}$ versorul lui $\vec{OA}$ şi cu $(b_1, b_2, 0)$ coordonatele punctului B. Astfel avem

$$\vec{OA} = a\bar{u}, \quad \vec{AB} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 - a\bar{u}. \tag{1}$$

Asupra barei OA acţionează forţa de atracţie $\vec{AB}$ aplicată în punctul A, forţa de greutate $-2a\bar{e}_3$ aplicată la mijlocul barei şi forţa de legătură $\bar{L}$ aplicată în punctul O.

Ecuaţiile echilibrului se pot scrie sub forma

$$\bar{L} + \vec{AB} - 2a\bar{e}_3 = 0, \quad \vec{OA} \times \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{OA} \times (-2a\bar{e}_3) = 0. \tag{2}$$

Din (1) şi $(2)_2$ deducem

$$\bar{u} \times (b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 - a\bar{e}_3) = 0. \tag{3}$$

Relaţia (3) exprimă faptul că versorul $\bar{u}$ este coliniar cu vectorul $b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 - a\bar{e}_3$. Rezultă

$$\bar{u} = \pm \frac{b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 - a\bar{e}_3}{(b_1^2 + b_2^2 + a^2)^{1/2}} \tag{4}$$

Prin urmare, există două poziții de echilibru simetrice față de punctul O. Pentru forța de legătură se găsește

$$\bar{L} = a\bar{e}_3 - \left[1 \mp \frac{a}{(b_1^2+b_2^2+a^2)^{1/2}}\right](b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2-a\bar{e}_3) .$$

313. Se consideră o curbă (C) raportată la două axe, una Ox_1 orizontală și alta Ox_2 verticală ascendentă. O bară rigidă AB de lungime 2a, omogenă și grea se sprijină, fără frecare, cu extremitatea A pe axa Ox_2. Să se determine forma curbei (C) astfel încît bara AB să fie în echilibru, oricare ar fi poziția ei compatibilă cu legăturile date, în fiecare din cazurile următoare :

1° Extremitatea B se sprijină, fără frecare, pe curba (C).

2° Bara AB este tangentă la curba (C), punctul de contact fiind arbitrar pe bară.

Rezolvare. 1°. Dacă notăm cu (x_1,x_2) coordonatele punctului B, atunci coordonatele punctului A sînt $(0,x_2 \pm \sqrt{4a^2-x_1^2})$. Deoarece bara AB este presupusă omogenă, rezultă că centrul său de greutate este situat la mijlocul segmentului AB și are coordonatele

$$(1) \qquad x_1^* = \frac{1}{2}x_1 , \quad x_2^* = x_2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4a^2-x_1^2} .$$

Ecuația curbei (C) o căutăm sub forma $x_2 = x_2(x_1)$. Pentru aflarea ecuației curbei (C) folosim relația (15.2). Se obține

$$(2) \qquad \delta(\bar{G}\bar{r}^*) = 0 ,$$

în care vectorul $\bar{r}^*$ are componentele (1).

Egalitatea (2) se reduce la

$$(3) \qquad \delta x_2^* = 0$$

și, cum x_2 depinde numai de x_1, deducem

$$(4) \qquad x_2^* = k , \quad k = \text{const.}$$

Prin eliminarea lui x_2^* din ecuațiile $(1)_2$ și (4) aflăm

ecuaţia generală a curbelor (C) care răspund la chestiune

(5) $$x_1^2 + 4(x_2-k)^2 = 4a^2 .$$

Ecuaţia (5) reprezintă o familie de elipse.

Observaţie. Ecuaţia (5) poate fi dedusă şi din condiţia ca forţele care acţionează asupra barei AB să formeze un sistem echivalent cu zero. In adevăr, asupra barei acţionează greutatea proprie $M\bar{g}$ aplicată în centrul său de greutate, forţa de legătură $\bar{L}_A$ normală axei Ox_2 în punctul A şi forţa de legătură $\bar{L}$ normală curbei (C) în punctul B. Condiţia de echilibru revine la ecuaţiile

(6) $$\bar{L}_A + \bar{L} - Mg\bar{e}_2 = 0$$

şi

(7) $$\vec{BA} \times \bar{L}_A + \frac{1}{2}\vec{BA} \times (-Mg\bar{e}_2) = 0 .$$

Dacă notăm cu θ unghiul pe care îl face tangenta geometrică la curba (C) în punctul de coordonate (x_1, x_2) cu axa Ox_1, avem

(8) $$tg\theta = x_2' , \quad \cos\theta = (1 + x_2'^2)^{-1/2}, \quad \sin\theta = x_2'(1+x_2'^2)^{-\frac{1}{2}} ,$$

unde accentul reprezintă operaţia de derivare în raport cu x_1.

Normala la curba (C) în punctul considerat are cosinusurile directoare $(-\sin\theta , \cos\theta)$ şi putem scrie

(9) $$\bar{L} = L(-x_2'\bar{e}_1 + \bar{e}_2)(1+x_2'^2)^{-1/2}, \quad \vec{BA} = -x_1\bar{e}_1 \pm (4a^2 - x_1^2)^{1/2}\bar{e}_2 .$$

Astfel ecuaţiile (6) şi (7) conduc la

(6') $$L_A - Lx_2'(1+x_2'^2)^{-1/2} = 0 , \quad L = Mg(1 + x_2'^2)^{1/2} ,$$

(7') $$\mp(4a^2 - x_1^2)^{1/2} L_A + \frac{1}{2} Mgx_1 = 0 .$$

Eliminînd pe L_A şi L din (6') şi (7') obţinem ecuaţia diferenţială a curbei (C) sub forma

$$x_2' = \pm \frac{1}{2} x_1 (4a^2 - x_1^2)^{-1/2} ,$$

de unde regăsim ecuaţia (5). In plus, putem determina forţele de legătură $\bar{L}_A$ şi $\bar{L}$.

2°. Fie $P(x_1,x_2)$ punctul de contact al curbei (C) cu bara AB. Rezultă că punctul A are coordonatele $(0,x_2-x_1x_2')$, iar coordonatele centrului de greutate P^* al barei sînt

$$(10) \qquad x_1^* = a(1+x_2'^2)^{-1/2},\ x_2^* = x_2-x_1x_2'+ax_2'(1+x_2'^2)^{-1/2}\ .$$

Bara AB este solicitată de greutatea sa $\overline{Mg}$ aplicată în punctul P^*, de forţa de legătură $\overline{L}_A$ normală axei Ox_2 în punctul A şi de forţa de legătură $\overline{L}$ normală curbei (C) în punctul P(forţa $\overline{L}$ este de forma $(9)_1$).

Pentru echilibru avem ecuaţiile (6') împreună cu

$$(11) \qquad \overrightarrow{AP}\times\overline{L} + \overrightarrow{AP^*}\times(-Mg\bar{e}_2) = 0\ .$$

Deoarece

$$\overrightarrow{AP} = x_1(\bar{e}_1+x_2'\bar{e}_2),\ \overrightarrow{AP^*} = a(1+x_2'^2)^{-1/2}(\bar{e}_1+x_2'\bar{e}_2)\ ,$$

egalitatea (11) se reduce la

$$(12) \qquad Lx_1(1+x_2'^2) - Mag = 0\ .$$

Prin eliminarea lui L din ecuaţiile $(6')_2$ şi (12) găsim ecuaţia diferenţială a curbei (C)

$$(13) \qquad x_1(1+x_2'^2)^{3/2} = a\ .$$

Din egalitatea (13) deducem

$$dx_2 = \pm\tfrac{3}{2}(a^{2/3}-x_1^{2/3})^{1/2}d(x_1^{2/3})$$

şi, integrînd, obţinem

$$x_2-k = \pm(a^{2/3}-x_1^{2/3})^{3/2},\quad k = \text{const.},$$

sau

$$(14) \qquad x_1^{2/3}+(x_2-k)^{2/3} = a^{2/3}\ .$$

Ecuaţia (14) reprezintă o familie de astroide (v.şi problema 49). Toate curbele familiei (14) se deduc prin translaţie de-a lungul axei Ox_2 din una din ele

$$x_1^{2/3}+x_2^{2/3} = a^{2/3}\ .$$

Curba (C) căutată este formată numai din porţiunea astroidei situată dedesubtul tangentelor paralele la axa Ox.

<u>314</u>. O bară rigidă AB, omogenă și grea se poate roti într-un plan vertical în jurul punctului fix A. Capătul B este legat cu un fir fără masă, flexibil și inextensibil, trecut peste un spripete fix O, de dimensiuni neglijabile de o greutate Q care poate aluneca fără frecare pe o curbă (C) din același plan vertical. Punctul A este situat pe verticala punctului O (v.fig.38). Să se determine forma curbei (C) astfel ca sistemul să fie în echilibru oricare ar fi poziția lui compatibilă cu legăturile date.

<u>Rezolvare</u>. Această problemă este cunoscută sub numele de podul ridicător al lui Bélidor. Luăm ca axă Ox_1 verticala punctului O orientată descendent, iar ca axă Ox_2 orizontala prin O a planului. Fie 2 a lungimea barei AB, M masa sa, ℓ lungimea firului și h abscisa punctului A ($h > 0$). Punctul Q îl definim prin coordonatele sale polare r și θ, iar ecuația curbei (C) o presupunem de forma $r = r(\theta)$. Acest

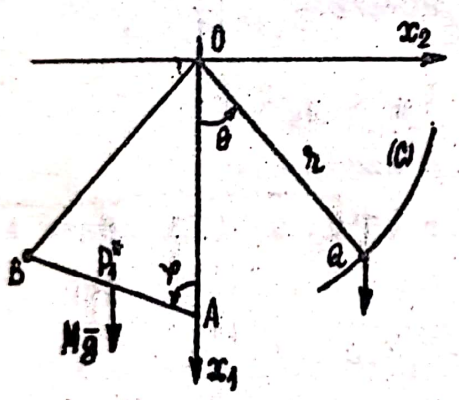

Fig.38

sistem mecanic are un grad de libertate și poziția sa este complet determinată cu ajutorul parametrului θ . Dacă punem $\varphi = \sphericalangle OAB$, atunci avem

(1) $$\overline{OB} = \ell - r \ , \ \cos\varphi = \frac{4a^2 + h^2 - (\ell - r)^2}{4ah} \ .$$

Vectorul de poziție al centrului de greutate P_1^* al barei AB este

(2) $$\bar{r}_1^* = (h - a\cos\varphi)\bar{e}_1 - a\bar{e}_2\sin\varphi \ ,$$

prin urmare, vectorul de poziție al centrului de greutate P^*

al sistemului material format din bara AB şi punctul Q (a cărui masă este $\frac{Q}{g}$) are expresia

$$(3) \qquad \bar{r}^* = \frac{Mg\bar{r}_1^* + Q\bar{r}}{Mg + Q}, \quad \bar{r} = \overrightarrow{OQ} = r(\bar{e}_1\cos\theta + \bar{e}_2\sin\theta).$$

Condiţia de echilibru se exprimă prin relaţia (2) de la problema 313. Deducem

$$\delta x_1^* = 0$$

şi, deoarece x_1^* depinde numai de θ , rezultă

$$(4) \qquad x_1^* = k, \quad k = \text{const.},$$

deci, centrul de greutate al sistemului se poate deplasa numai orizontal.

Egalităţile (1)-(4) conduc la ecuaţia curbei (C).

$$(5) \qquad r^2 - (\alpha + \beta\cos\theta)r + \gamma = 0,$$

în care α, β, γ sînt constante (α şi β fiind bine determinate). Curba reprezentată prin ecuaţia (5) este un oval al lui Descartes. In cazul particular $\gamma = 0$ avem un melc al lui Pascal (v. şi problema 98).

Observaţie. De asemenea, dacă introducem forţele de legătură (reacţiunea din punctul A, tensiunile firului în B şi Q, reacţiunea curbei) şi scriem condiţiile de echilibru separat pentru bara AB şi punctul Q , obţinem ecuaţia (5).

315. Se consideră două bare rigide egale AB şi BC, grele şi omogene situate în planul x_1Ox_2 a cărui axă Ox_1 este orizontală, iar axa Ox_2 este verticală ascendentă. Bara AB se poate roti în jurul punctului A care este fixat pe axa Ox_2, cele două bare sînt articulate în B şi capătul C al barei BC poate aluneca fără frecare pe axa Ox_1 , fiind solicitat de forţa $Q\bar{e}_1$ (v. fig. 39). Să se afle poziţia de echilibru a sistemului.

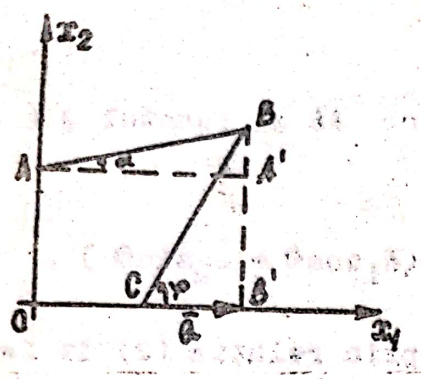

Fig.39

Rezolvare. Fie ℓ lungimea unei bare, M masa corespunzătoare și h ordonata punctului A, $h \in (0, 2\ell)$. Patrulaterul OCBA, în care se cunosc lungimile a trei laturi ($\overline{OA}=h$, $\overline{AB}=\overline{BC}=\ell$) și un unghi ($\sphericalangle COA = \frac{\pi}{2}$) este complet determinat dacă se cunoaște un al cincilea element al său (unghi sau latură), deci, sistemul dat are un singur grad de libertate. Luăm ca parametru unghiul φ pe care îl face vectorul $\overrightarrow{CB}$ cu axa Ox_1.

Pentru simplificarea calculelor introducem încă un parametru, dependent de φ și anume unghiul α dintre vectorul $\overrightarrow{AB}$ și axa Ox_1. Dacă facem observația că

$$\overline{B'B} = \overline{B'A'} + \overline{A'B}\ ,\ \overline{B'B} = \ell\sin\varphi\ ,\ \overline{B'A'} = h,\ \overline{A'B} = \ell\sin\alpha\ ,$$

deducem că legătura dintre α și φ se exprimă prin relația

$$\sin\varphi - \sin\alpha = h/\ell \quad . \tag{1}$$

Notăm cu P_1^* și P_2^* respectiv centrul de masă al barei AB și al barei BC. Forțele active care acționează asupra sistemului dat sînt greutățile celor două bare aplicate în centrele lor de masă și forța $\bar{Q} = Q\bar{e}_1$ aplicată în punctul C. Avem

$$\begin{cases} \bar{r}_C = \overline{OC} = \ell(\cos\alpha - \cos\varphi)\bar{e}_1\ , \\ \bar{r}_1^* = \overline{OP_1^*} = \frac{\ell}{2}(\bar{e}_1\cos\alpha + \bar{e}_2\sin\alpha) + h\bar{e}_2\ , \\ \bar{r}_2^* = \overline{OP_2^*} = \frac{\ell}{2}(2\cos\alpha - \cos\varphi)\bar{e}_1 + \frac{\ell}{2}\bar{e}_2\sin\varphi\ . \end{cases} \tag{2}$$

Metoda I. În cazul de față condiția de echilibru (15.2) se reduce la

$$\delta(M\bar{g}(\bar{r}_1^* + \bar{r}_2^*)) + \delta(\bar{Q}\bar{r}_C) = 0\ , \tag{3}$$

relație care trebuie să aibă loc pentru orice deplasare virtuală a sistemului compatibilă cu legăturile date.

Avînd în vedere formulele (2), egalitatea (3) devine

$$-Mg\,\delta(\sin\alpha+\sin\varphi)+2Q\,\delta(\cos\alpha-\cos\varphi)=0,$$

sau

$$(4)\quad (Mg\cos\alpha+2Q\sin\alpha)\delta\alpha+(Mg\cos\varphi-2Q\sin\varphi)\delta\varphi=0.$$

Egalitatea (4) trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi $\delta\alpha$ şi $\delta\varphi$ care verifică consecinţa diferenţială a legăturii (1)

$$(5)\quad \cos\varphi\,\delta\varphi-\cos\alpha\,\delta\alpha=0.$$

Din (4) şi (5) obţinem

$$(6)\quad \operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\alpha=\frac{Mg}{Q}.$$

Ecuaţiile (1) şi (6) definesc poziţia de echilibru a sistemului dat.

Metoda II. Eliberăm sistemul de legături şi scriem condiţiile de echilibru pentru fiecare bară. Avem următoarele forţe de legătură: $\bar{L}_A$ acţionează în punctul A asupra barei AB, $\bar{L}$ acţionează în punctul B asupra barei AB, $-\bar{L}$ (conform principiului acţiunii şi reacţiunii) acţionează în punctul B asupra barei BC şi $\bar{L}_C$ acţionează în punctul C asupra barei BC şi este normală axei Ox_1.

Condiţia de echilibru a barei AB se poate scrie sub forma

$$(7)\quad \bar{L}_A+\bar{L}-Mg\bar{e}_2=0,\quad \overrightarrow{AB}\times\bar{L}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times(-Mg\bar{e}_2)=0,$$

iar pentru bara BC avem

$$(8)\quad L_C\bar{e}_2-\bar{L}+Q\bar{e}_1-Mg\bar{e}_2=0,\quad \overrightarrow{CB}\times(-\bar{L})+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\times(-Mge_2)=0.$$

Formele pe componente ale ecuaţiilor (7) şi (8) sînt respectiv

$$(7')\quad L_{A1}+L_1=0,\ L_{A2}+L_2=Mg,\ 2L_2\cos\alpha-Mg\cos\alpha-2L_1\sin\alpha=0,$$

$$(8')\quad L_1=Q,\ L_C-L_2=Mg,\ 2L_2\cos\varphi+Mg\cos\varphi-2L_1\sin\varphi=0.$$

Prin eliminarea lui L_1 şi L_2 din ecuaţiile $(7')_3$, $(8')_1$ şi $(8')_3$ regăsim ecuaţia (6). In plus, obţinem imediat şi forţele de legătură

$L_{A1}=-Q$, $L_{A2}=\frac{1}{2}Mg-Qtg\alpha$, $L_1=Q$, $L_2=\frac{1}{2}Mg+Qtg\alpha$, $L_C=\frac{3}{2}Mg+Q\,tg\alpha$.

Metoda III. Barele AB şi BC supuse la legăturile date reprezintă un sistem articulat simplu conex. Condiţia necesară şi suficientă de echilibru pentru acest sistem se exprimă prin relaţiile

$$(9)\qquad \bar{L}_A + L_C\bar{e}_2 + Q\bar{e}_1 - 2Mg\bar{e}_2 = 0\ ,$$

$$(10)\quad \vec{BA}\times(\bar{L}_A-\tfrac{1}{2}Mg\bar{e}_2)=0,\ \vec{CA}\times\bar{L}_A+\vec{CP}_1^{*}\times(-Mg\bar{e}_2)+\tfrac{1}{2}\vec{CB}\times(-Mg\bar{e}_2)=0.$$

Deoarece

$$\vec{CA}=\vec{CB}+\vec{BA}\ ,\quad \vec{CP}_1^{*}=\vec{CB}+\tfrac{1}{2}\vec{BA}\ ,$$

ecuaţiile (10) revin la

$$(11)\quad \vec{AB}\times(\bar{L}_A-\tfrac{1}{2}Mg\bar{e}_2)=0\ ,\quad \vec{CB}\times(\bar{L}_A-\tfrac{3}{2}Mg\bar{e}_2)=0\ .$$

Din egalităţile (9) şi (11) deducem

$$(12)\qquad \begin{cases} L_{A1}=-Q\ ,\ L_{A2}+L_C=2Mg\ , \\ L_{A1}tg\alpha-L_{A2}=-\tfrac{1}{2}Mg\ ,\ L_{A1}tg\varphi-L_{A2}=-\tfrac{3}{2}Mg\ . \end{cases}$$

Ecuaţiile (12) conduc la formula (6) şi la relaţiile

$$L_{A1}=-Q\ ,\ L_{A2}=\tfrac{1}{2}Mg-Qtg\alpha,\ L_C=\tfrac{3}{2}Mg+Qtg\alpha\ .$$

316. Două sfere rigide (S_1) şi (S_2), omogene şi grele, de raze diferite şi tangente între ele se sprijină pe două plane care se intersectează după o dreaptă orizontală şi formează unghiuri date α_1 şi α_2 cu planul orizontal. Presupunînd că toate frecările sînt neglijabile să se afle poziţia de echilibru a sistemului.

Rezolvare. Avem un sistem format din două corpuri rigide. Un sistem material alcătuit din mai multe rigide este în echilibru dacă şi numai dacă fiecare constituient al său este în echilibru. Prin urmare, vom elibera sistemul de legături şi vom impune condiţia de echilibru pentru fiecare sferă în parte.

Fie M_1 şi M_2 masele celor două sfere şi R_1, R_2 razele lor.

Asupra sferei (S_1) acţionează greutatea proprie $M_1\bar{g}$ aplicată în centrul său C_1, reacţiunea $\bar{L}_1$ normală la planul de sprijin în punctul de tangenţă A_1 şi reacţiunea $\bar{L}$ aplicată în punctul de contact C dintre cele două sfere. Sfera (S_2) este solicitată de greutatea proprie $M_2\bar{g}$ aplicată în centrul său C_2, reacţiunea $\bar{L}_2$ normală planului de sprijin în punctul de tangenţă A_2 şi reacţiunea $\bar{L}'$ aplicată în punctul C (v.fig.40). Forţele de legătură $\bar{L}$ şi $\bar{L}'$ sînt normale la cele două sfere şi, conform principiului acţiunii şi reacţiunii sînt egale şi opuse, deci $\bar{L}' = -\bar{L}$.

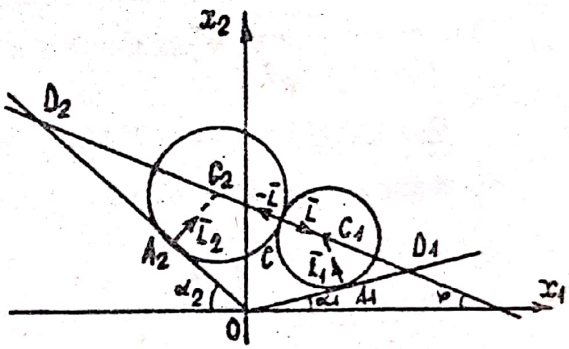

Fig.40

Metoda I. Deoarece momentele forţelor $\bar{L}_1$, $\bar{L}$ şi $M_1\bar{g}$ în raport cu punctul C_1 sînt nule, condiţia de echilibru a sferei (S_1) se reduce la ecuaţia

(1) $\bar{L}_1 + \bar{L} + M_1\bar{g} = 0$.

In mod analog pentru sfera (S_2) avem

(2) $\bar{L}_2 - \bar{L} + M_2\bar{g} = 0$.

Din egalităţile (1) şi (2) rezultă că vectorii $\bar{L}_1, \bar{L}_2$ şi $\bar{L}$ sînt situaţi într-un plan vertical (v.şi problema 304). Astfel, linia centrelor C_1C_2 ale celor două sfere aparţine unui plan vertical perpendicular muchiei diedrului format de cele două plane date.

Sistemul are un singur grad de libertate şi poziţia sa poate fi determinată cu ajutorul unghiului φ pe care îl face linia centrelor cu direcţia orizontală.

Dacă proiectăm ecuaţiile (1) şi (2) pe axa orizontală Ox_1 şi pe axa verticală ascendentă Ox_2 obţinem respectiv

(3) $L\cos\varphi - L_1\sin\alpha_1 = 0$, $L_1\cos\alpha_1 - L\sin\varphi = M_1 g$

şi

(4) $L_2\sin\alpha_2 - L\cos\varphi = 0$, $L_2\cos\alpha_2 + L\sin\varphi = M_2 g$.

Eliminînd pe L_1, L_2 şi L din egalităţile (3) şi (4) deducem că poziţia de echilibru este definită de relaţia

(5) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M_2 \operatorname{ctg}\alpha_1 - M_1 \operatorname{ctg}\alpha_2}{M_1 + M_2} .$$

Forţele de legătură sînt date de

(7) $$\begin{cases} L_1 = (M_1+M_2)g\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} , \quad L_2 = (M_1+M_2)g\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} , \\ L = \dfrac{g}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\sqrt{M_1^2\sin^2\alpha_1 + M_2^2\sin^2\alpha_2 - 2M_1M_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos(\alpha_1+\alpha_2)} . \end{cases}$$

Observaţie. Ecuaţiile (5) şi (6) pot fi găsite şi prin proiectarea egalităţilor (1) şi (2) respectiv pe dreptele OA_1, A_1C_1 şi OA_2, A_2C_2 .

Metoda II. Aplicăm direct teorema fundamentală a staticii (v. relaţia (15.2)). In cazul de faţă condiţia de echilibru revine la egalitatea

(7) $$M_1\bar{g}\,\delta(\overrightarrow{OC_1}) + M_2\bar{g}\,\delta(\overrightarrow{OC_2}) = 0 ,$$

care trebuie să aibă loc pentru orice $\delta\varphi$.

Deoarece

$$\begin{cases} \overrightarrow{OC_1} = \overline{OA_1}(\bar{e}_1\cos\alpha_1 + \bar{e}_2\sin\alpha_1) + R_1(-\bar{e}_1\sin\alpha_1 + \bar{e}_2\cos\alpha_1) , \\ \overrightarrow{OC_2} = \overline{OA_2}(-\bar{e}_1\cos\alpha_2 + \bar{e}_2\sin\alpha_2) + R_2(\bar{e}_1\sin\alpha_2 + \bar{e}_2\cos\alpha_2) , \end{cases}$$

formula (7) se reduce la

(8) $$M_1\sin\alpha_1\frac{d(\overline{OA_1})}{d\varphi} + M_2\sin\alpha_2\frac{d(\overline{OA_2})}{d\varphi} = 0 .$$

Pentru exprimarea segmentelor $\overline{OA_1}$ şi $\overline{OA_2}$ în funcţie de φ, mai întîi, din triunghiurile dreptunghice $C_1A_1D_1$ şi $D_2A_2C_2$ deducem

$$\begin{cases} \overline{C_1D_1} = \dfrac{R_1}{\sin(\alpha_1+\varphi)}, & \overline{A_1D_1} = R_1\operatorname{ctg}(\alpha_1+\varphi), \\ \overline{C_2D_2} = \dfrac{R_2}{\sin(\alpha_2-\varphi)}, & \overline{A_2D_2} = R_2\operatorname{ctg}(\alpha_2-\varphi), \end{cases}$$

deci

$$(9) \qquad \overline{D_1D_2} = R_1+R_2+\frac{R_1}{\sin(\alpha_1+\varphi)}+\frac{R_2}{\sin(\alpha_2-\varphi)}.$$

Pe de altă parte, în triunghiul OD_1D_2 avem

$$\frac{\overline{OD_1}}{\sin(\alpha_2-\varphi)} = \frac{\overline{OD_2}}{\sin(\alpha_1+\varphi)} = \frac{\overline{D_1D_2}}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)},$$

prin urmare, putem scrie

$$(10) \quad \begin{cases} \overline{OA_1} = \overline{OD_1}-\overline{A_1D_1} = \dfrac{\sin(\alpha_2-\varphi)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\overline{D_1D_2} - R_1\operatorname{ctg}(\alpha_1+\varphi), \\ \overline{OA_2} = \overline{OD_2}-\overline{A_2D_2} = \dfrac{\sin(\alpha_1+\varphi)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\overline{D_1D_2} - R_2\operatorname{ctg}(\alpha_2-\varphi). \end{cases}$$

Din (9) și (10) rezultă

$$\frac{d(\overline{OA_1})}{d\varphi} = -(R_1+R_2)\frac{\cos(\alpha_2-\varphi)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad \frac{d(\overline{OA_2})}{d\varphi} = (R_1+R_2)\frac{\cos(\alpha_1+\varphi)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)},$$

astfel încît egalitatea (8) devine

$$-M_1\sin\alpha_1\cos(\alpha_2-\varphi)+M_2\sin\alpha_2\cos(\alpha_1+\varphi) = 0,$$

de unde regăsim formula (5).

317. Un sistem articulat simplu conex este în echilibru într-un plan vertical. Trei bare consecutive ale sistemului, considerate în același sens de parcurs, formează cu orizontala respectiv unghiurile α, β, γ (v fig.41). Nodurile intermediare suportă acțiunile forțelor verticale $\overline{P}$ și $\overline{Q}$, iar greutățile barelor sînt presupuse neglijabile. Să se demonstreze relația

$$P\sin(\beta-\gamma)\cos\alpha = Q\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma.$$

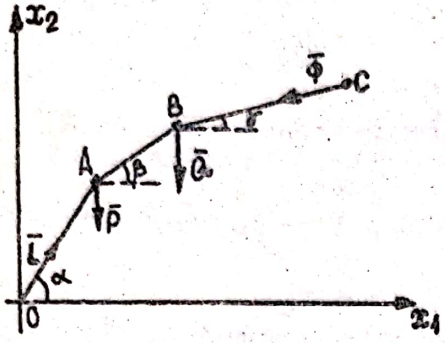

Fig.41

Rezolvare. Dacă notăm cu a, b, c lungimile barelor OA, AB, BC respectiv, avem

$$(1)\quad \begin{cases} \vec{OA}=a(\bar{e}_1\cos\alpha+\bar{e}_2\sin\alpha), \\ \vec{AB}=b(\bar{e}_1\cos\beta+\bar{e}_2\sin\beta), \\ \vec{BC}=c(\bar{e}_1\cos\gamma+\bar{e}_2\sin\gamma). \end{cases}$$

Putem elibera sistemul format din cele trei bare de legături prin introducerea forţelor de legătură $\bar{L}$ aplicată în punctul O şi $\bar{\Phi}$ în C .

Deoarece avem un sistem articulat simplu conex, condiţia necesară şi suficientă de echilibru se exprimă prin relaţiile

$$(2)\qquad \bar{L}+\bar{\Phi}+\bar{P}+\bar{Q}=0,$$

$$(3)\quad \vec{AO}\times\bar{L}=0,\ \vec{BO}\times\bar{L}+\vec{BA}\times\bar{P}=0,\ \vec{CO}\times\bar{L}+\vec{CA}\times\bar{P}+\vec{CB}\times\bar{Q}=0.$$

Cum

$$\vec{BO}=\vec{BA}+\vec{AO},\ \vec{CO}=\vec{CB}+\vec{BA}+\vec{AO},\ \vec{CA}=\vec{CB}+\vec{BA},$$

ecuaţiile (3) sînt echivalente cu

$$(4)\quad \vec{OA}\times\bar{L}=0,\ \vec{AB}\times(\bar{L}+\bar{P})=0,\ \vec{BC}\times(\bar{L}+\bar{P}+\bar{Q})=0.$$

Egalitatea $(4)_1$ exprimă faptul că forţa $\bar{L}$ este coliniară cu vectorul $\vec{OA}$, iar din egalităţile (2) şi $(4)_3$ rezultă că forţa $\bar{\Phi}$ este coliniară cu vectorul $\vec{CB}$, deci avem

$$(5)\quad \bar{L}=L(\bar{e}_1\cos\alpha+\bar{e}_2\sin\alpha),\ \bar{\Phi}=-\Phi(\bar{e}_1\cos\gamma+\bar{e}_2\sin\gamma).$$

Din ecuaţiile (2), $(4)_2$ şi (5) deducem

$$(6)\quad L\cos\alpha-\Phi\cos\gamma=0,\ L\sin\alpha-\Phi\sin\gamma=P+Q,\ L=\frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Dacă eliminăm pe L şi Φ din relaţiile (6) găsim formula din enunţul problemei. Forţele de legătură au expresiile

$$L=\frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)},\qquad \Phi=\frac{Q\cos\beta}{\sin(\beta-\gamma)}.$$

218. Trei bare rigide OA, AB, BC, grele și omogene, situate într-un plan vertical sînt îmbinate între ele prin articulațiile A și B. Cele două bare extreme se pot roti în jurul punctelor fixe O și C care sînt situate pe aceeași orizontală (v. fig.42). Să se afle poziția de echilibru.

Rezolvare. Fie

$$\overline{OA} = a\ ,\ \overline{AB} = b\ ,\ \overline{BC} = c\ ,\ \overline{OC} = \ell\ ,\ \ell < a+b+c$$

și P_1, P_2, P_3 greutățile celor trei bare.

Patrulaterul OABC, în care se cunosc lungimile laturilor, este complet determinat dacă se cunoaște un unghi al său, deci sistemul dat are un singur grad de libertate. Dacă notăm cu α și γ unghiurile din O și C ale patrulaterului și cu β unghiul pe care îl face bara AB cu direcția orizontală, avem

$$(1)\quad \begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = \ell\ , \\ a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma\ . \end{cases}$$

Prin urmare, cele trei unghiuri sînt legate între ele prin două relații.

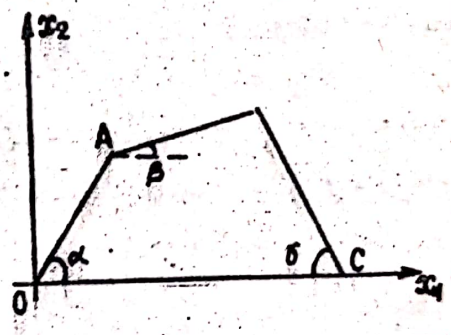

Fig.42

Metoda I. Eliberăm sistemul de legăturile din punctele O și C prin introducerea forțelor de legătură $\overline{L}$ și $\overline{\Phi}$ respectiv.

Condiția necesară și suficientă de echilibru a sistemului articulat simplu conex format din cele trei bare constă în egalitățile

$$(2)\qquad \overline{L} + \overline{\Phi} + \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 = 0\ ,$$

$$(3)\quad \begin{cases} \vec{AO}\times\overline{L} + \frac{1}{2}\vec{AO}\times\overline{P}_1 = 0,\ \vec{BO}\times\overline{L} + (\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AO})\times\overline{P}_1 + \frac{1}{2}\vec{BA}\times\overline{P}_2 = 0\ , \\ \vec{CO}\times\overline{L} + (\vec{CO} + \frac{1}{2}\vec{OA})\times\overline{P}_1 + (\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{BA})\times\overline{P}_2 + \frac{1}{2}\vec{CB}\times\overline{P}_3 = 0\ . \end{cases}$$

Ecuaţiile (3) sînt echivalente cu

$$(4)\quad \vec{OA}\times(\bar{L}+\tfrac{1}{2}\bar{P}_1)=0,\ \vec{AB}\times(\bar{L}+\bar{P}_1+\tfrac{1}{2}\bar{P}_2)=0,\ \vec{BC}\times(\bar{L}+\bar{P}_1+\bar{P}_2+\tfrac{1}{2}\bar{P}_3)=0\ .$$

Proiectînd egalităţile (2) şi (4) pe axa orizontală Ox_1 şi pe axa verticală ascendentă Ox_2, obţinem

$$(5)\quad \begin{cases} L_1+\Phi_1=0\ ,\ L_2+\Phi_2=P_1+P_2+P_3\ , \\ L_1\operatorname{tg}\alpha-L_2=-\tfrac{1}{2}P_1,\ L_1\operatorname{tg}\beta-L_2=-P_1-\tfrac{P_2}{2},\ L_1\operatorname{tg}\gamma+L_2=P_1+P_2+\tfrac{1}{2}P_3\ . \end{cases}$$

Dacă eliminăm pe L_1 şi L_2 din ecuaţiile $(5)_3$-$(5)_5$ găsim

$$(6)\quad (P_2+P_3)\operatorname{tg}\alpha-(P_1+2P_2+P_3)\operatorname{tg}\beta-(P_1+P_2)\operatorname{tg}\gamma=0\ .$$

Ecuaţia (6) împreună cu ecuaţiile de legătură (1) determină poziţia de echilibru. Forţele de legătură au expresiile

$$L_1=-\Phi_1=\frac{P_1+P_2}{2(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)},\ L_2=\frac{P_1+P_2}{2(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)}\operatorname{tg}\alpha+\tfrac{1}{2}P_1\ ,$$

$$\Phi_2=-\frac{P_1+P_2}{2(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)}\operatorname{tg}\alpha+\tfrac{1}{2}P_1+P_2+P_3\ .$$

Metoda II. Aplicăm direct teorema fundamentală a staticii. În cazul de faţă relaţia (15.2) are forma

$$\delta\left[\tfrac{1}{2}\vec{OA}.\bar{P}_1+(\vec{OA}+\tfrac{1}{2}\vec{AB})\bar{P}_2+(\vec{OC}+\tfrac{1}{2}\vec{CB})\bar{P}_3\right]=0\ ,$$

care se reduce la

$$(7)\quad a(P_1+2P_2)\cos\alpha\,\delta\alpha+bP_2\cos\beta\,\delta\beta+cP_3\cos\gamma\,\delta\gamma=0\ .$$

Egalitatea (7) trebuie să fie satisfăcută pentru orice variaţii $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ care verifică consecinţele diferenţiale ale legăturilor (1)

$$(8)\quad \begin{cases} a\sin\alpha\,\delta\alpha+b\sin\beta\,\delta\beta+c\sin\gamma\,\delta\gamma=0\ , \\ a\cos\alpha\,\delta\alpha+b\cos\beta\,\delta\beta-c\cos\gamma\,\delta\gamma=0\ . \end{cases}$$

Deoarece cantităţile $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ nu sînt toate nule, din (7) şi (8) deducem

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & -\cos\gamma \\ (P_1+2P_2)\cos\alpha & P_2\cos\beta & P_3\cos\gamma \end{vmatrix} = 0 ,$$

sau

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}\beta & \operatorname{tg}\gamma \\ 1 & 1 & -1 \\ P_1+2P_2 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

de unde regăsim relaţia (6).

319. Să se afle figura de echilibru a unui fir flexibil şi inextensibil, în cazul cînd fiecare particulă a sa este solicitată de un centru fix cu o forţă a cărei mărime este invers proporţională cu pătratul distanţei.

Rezolvare. Fie O centrul fix dat şi $\bar{r}$ vectorul de poziţie al unui punct P al firului faţă de O. Forţa specifică de lungime este de forma

$$\bar{F} = \frac{k\bar{r}}{r^3} , \quad k = \text{const.}, \tag{1}$$

prin urmare, ecuaţia (15.10) devine

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{d\bar{r}}{ds}\right) + k\frac{\bar{r}}{r^3} = 0 . \tag{2}$$

Din egalitatea (2) deducem

$$\bar{r} \times \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\bar{r}}{ds}\right) = 0 ,$$

care este echivalentă cu

$$\frac{d}{ds}\left[T\left(\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{ds}\right)\right] = 0 . \tag{3}$$

Ecuaţia (3) ne arată că

$$T\left(\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{ds}\right) = \bar{C} , \tag{4}$$

unde $\bar{C}$ este un vector constant.

Înmulţind scalar cu $\bar{r}$ egalitatea (4) obţinem

$$\bar{C}\,\bar{r} = 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & -\cos\gamma \\ (P_1+2P_2)\cos\alpha & P_2\cos\beta & P_3\cos\gamma \end{vmatrix} = 0 ,$$

sau

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}\beta & \operatorname{tg}\gamma \\ 1 & 1 & -1 \\ P_1+2P_2 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

de unde regăsim relaţia (6).

219. Să se afle figura de echilibru a unui fir flexibil şi inextensibil, în cazul cînd fiecare particulă a sa este solicitată de un centru fix cu o forţă a cărei mărime este invers proporţională cu pătratul distanţei.

Rezolvare. Fie O centrul fix dat şi $\bar{r}$ vectorul de poziţie al unui punct P al firului faţă de O. Forţa specifică de lungime este de forma

$$\bar{F} = \frac{k\bar{r}}{r^3} , \quad k = \text{const.}, \tag{1}$$

prin urmare, ecuaţia (15.10) devine

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{d\bar{r}}{ds}\right) + k\frac{\bar{r}}{r^3} = 0 . \tag{2}$$

Din egalitatea (2) deducem

$$\bar{r}\times\frac{d}{ds}\left(T\frac{d\bar{r}}{ds}\right) = 0 ,$$

care este echivalentă cu

$$\frac{d}{ds}\left[T\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{ds}\right)\right] = 0 . \tag{3}$$

Ecuaţia (3) ne arată că

$$T\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{ds}\right) = \bar{C} , \tag{4}$$

unde $\bar{C}$ este un vector constant.

Înmulţind scalar cu $\bar{r}$ egalitatea (4) obţinem

$$\bar{C}\,\bar{r} = 0 ,$$

deci, figura de echilibru este situată într-un plan care trece prin origine.

Notăm acest plan cu x_1Ox_2. Vom utiliza coordonatele polare r şi θ ale unui punct P al firului. Pentru a determina ecuaţia curbei de echilibru a firului şi tensiunea $\overline{T}$ avem nevoie de două ecuaţii. Tensiunea firului se deduce din ecuaţia $(15.12)_1$. In adevăr, în cazul actual avem

$$F_t = \overline{F}\,\frac{d\overline{r}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{k}{r}\right),$$

astfel încît găsim

$$T = \frac{k}{r} + h, \quad h = \text{const.} \tag{5}$$

Pe de altă parte, ecuaţia (4) dă

$$Tr^2\frac{d\theta}{ds} = C. \tag{6}$$

Deoarece $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2$, prin eliminarea lui T din egalităţile (5) şi (6) rezultă

$$\sqrt{r'^2 + r^2} = \frac{(hr + k)r}{C}, \tag{7}$$

unde accentul indică operaţia de derivare în raport cu θ.

Luînd pe $\frac{1}{r}$ ca funcţie necunoscută, ecuaţia (7) se scrie

$$\sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)'^2 + \frac{1}{r^2}} = \frac{1}{C}\left(k\,\frac{1}{r} + h\right). \tag{7'}$$

Dacă ridicăm la pătrat egalitatea (7') şi apoi derivăm în raport cu θ, obţinem

$$\left(\frac{1}{r}\right)'' + \frac{1}{r} = \frac{k}{C^2}\left(k\frac{1}{r} + h\right), \left(\frac{1}{r}\right)' = 0. \tag{8}$$

Din relaţiile (8) deducem că figura de echilibru a firului este reprezentată printr-o ecuaţie de forma

$\frac{1}{r} = a+b\cos m\theta$, sau $\frac{1}{r} = a+b\operatorname{ch} m\theta$, sau $\frac{1}{r} = a+b\theta^2$, sau $r=a$,

unde a,b şi m sînt constante, care se determină din date suplimentare.

320. Să se determine figura de echilibru a unui fir flexibil greu, a cărui densitate este $\rho = \frac{k}{\cos^2 \frac{s}{a}}$, unde a și k sînt constante, iar arcul s este măsurat de la punctul cel mai de jos.

Rezolvare. In acest caz forța specifică de lungime este

(1) $$\bar{F} = \rho \bar{g} ,$$

astfel încît ecuația (15.10) devine

(2) $$\frac{d}{ds}(T \frac{d\bar{r}}{ds}) + \rho \bar{g} = 0 .$$

Mai întîi, din (2) rezultă că figura de echilibru este situată într-un plan vertical. In adevăr, egalitatea (2) conduce la

(3) $$T(\bar{g} \times \frac{d\bar{r}}{ds}) = \bar{C} ,$$

în care $\bar{C}$ este un vector constant. Prin urmare

(4) $$\bar{C} \frac{d\bar{r}}{ds} = 0 , \quad \bar{C}\bar{g} = 0 ,$$

deci, curba de echilibru este situată în planul

(5) $$\bar{C}\bar{r} = C_0 , \quad C_0 = \text{const.},$$

care este vertical (normala $\bar{C}$ la plan fiind perpendiculară pe $\bar{g}$) .

Notăm cu x_1Ox_2 planul (5) și presupunem că axa Ox_1 este orizontală, iar Ox_2 este verticală ascendentă. Astfel, avem

(6) $$\bar{C} = C\bar{e}_3 , \quad C_0 = 0 .$$

Avînd în vedere expresia dată a lui ρ , prin integrarea ecuației (2) obținem

(7) $$T \frac{d\bar{r}}{ds} + akg\bar{} \operatorname{tg} \frac{s}{a} = \frac{C}{g} \bar{e}_1 ,$$

unde am avut în vedere că x_2 este minim pentru $s=0$ și are loc relația (3).

Din (7) deducem

$$T = \frac{1}{g} \sqrt{C^2 + a^2k^2g^4 \operatorname{tg}^2 \frac{s}{a}}$$

și

(8) $d\bar{r}=\frac{ad(\sin\frac{s}{a})}{\sqrt{1+(\omega^2-1)\sin^2\frac{s}{a}}}\bar{e}_1-\frac{a\omega d(\cos\frac{s}{a})}{\sqrt{\omega^2+(1-\omega^2)\cos^2\frac{s}{a}}}\bar{e}_2,\quad \omega=\frac{akg^2}{Q}$.

Rezultă că ecuaţia vectorială parametrică a curbei căutate este de forma

$$\bar{r}=\frac{a}{\sqrt{\omega^2-1}}\left[\bar{e}_1\ln\left|\sin\frac{s}{a}+\sqrt{\sin^2\frac{s}{a}+\frac{1}{\omega^2-1}}\right|+\right.$$

$$\left.+\omega\bar{e}_2\arccos\left(\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega}\cos\frac{s}{a}\right)\right]+\bar{r}_0,\text{ sau}$$

$$\bar{r}=a\left(\bar{e}_1\sin\frac{s}{a}-\bar{e}_2\cos\frac{s}{a}\right)+\bar{r}_0\ ,\quad \text{sau}$$

$$\bar{r}=\frac{a}{\sqrt{1-\omega^2}}\left[\bar{e}_1\arcsin\left(\sqrt{1-\omega^2}\sin\frac{s}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-\omega\bar{e}_2\ln\left|\cos\frac{s}{a}+\sqrt{\cos^2\frac{s}{a}+\frac{\omega^2}{1-\omega^2}}\right|\right]+\bar{r}_0,$$

$\bar{r}_0$ fiind un vector constant, după cum $\omega>1$, sau $\omega=1$, sau $\omega<1$.

321. Un fir flexibil greu are extremităţile fixate în două puncte date ale unei orizontale, iar tensiunea în punctul cel mai de jos este egală cu jumătate din greutatea firului. Să se afle curba de echilibru şi legea densităţii firului, în cazul cînd tensiunea în fiecare punct este invers proporţională cu curbura.

Rezolvare. Toate consideraţiile de la problema 320 pînă la relaţiile (6) inclusiv, sînt valabile şi în cazul de faţă.

Din egalitatea (2) de la problema precedentă rezultă

(1) $$T\left(\frac{d\bar{r}}{ds}\times\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)=\rho\left(\bar{g}\times\frac{d\bar{r}}{ds}\right).$$

Deoarece curbura $\frac{1}{R}$ satisface relaţia

$$\frac{1}{R}=\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\times\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right|$$

şi, prin ipoteză, avem $T=kR$, $k=\text{const.}$, egalitatea (1) împreună cu relaţia (3) de la problema 320 dau

(2) $$\rho \frac{dx_1}{ds} = \frac{k}{G} .$$

Ecuaţiile nedefinite de echilibru ale firului (15.11) se reduc la

(3) $$T \frac{dx_1}{ds} = k_1 ; \quad \frac{d}{ds}\left(T \frac{dx_2}{ds}\right) = \rho g , \quad k_1 = \text{const.}$$

Prin eliminarea lui T şi ρ din (2) şi (3) obţinem

(4) $$x_2'' = b(1 + x_1'^2) , \quad b = \frac{k}{k_1} ,$$

unde accentul reprezintă operaţia de derivare în raport cu x_1.

Ecuaţia diferenţială (4) se integrează fără dificultate şi se găseşte integrala generală

(5) $$x_2 = x_2^0 - \frac{1}{b} \ln|\cos b(x_1 - x_1^0)| ,$$

x_1^0 şi x_2^0 fiind constante.

Fără a micşora generalitatea problemei putem presupune că extremităţile firului sînt situate pe axa Ox_1. Dacă notăm cu 2a distanţa dintre extremităţi, atunci deducem

$$x_1^0 = 0 , \quad x_2^0 = \frac{1}{b} \ln|\cos ab| ,$$

iar ecuaţia (5) devine

(5') $$x_2 = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{\cos b x_1}{\cos ab} \right| .$$

Din ecuaţiile (2),(3) şi (5') rezultă

(6) $$\rho = \frac{k}{g \cos kx_1} , \quad T = \frac{k_1}{\cos kx_1} .$$

In punctul cel mai de jos al firului ($x_1 = 0$) tensiunea este k_1, prin urmare, avem $k_1 = \frac{1}{2}G$, unde G este greutatea firului. Cum

$$G = 2 \int_0^a \rho g ds = \frac{2k}{b} \operatorname{tg} ab ,$$

găsim $\operatorname{tg} ab = 1$, deci, $b = \frac{\pi}{4a}$ şi $k = \frac{\pi G}{8a}$.

Astfel, relaţiile (5') şi (6) devin respectiv

$$x_2 = -\frac{4a}{\pi} \ln \left| \sqrt{2} \cos \frac{\pi x_1}{4a} \right| ,$$

$$\rho = \frac{\pi G}{8ag \cos \frac{\pi x_1}{4a}} , \quad T = \frac{G}{2 \cos \frac{\pi x_1}{4a}} .$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XVI

SISTEME CU MASĂ VARIABILĂ

In mecanica newtoniană se utilizează aceleaşi noţiuni şi principii, atît pentru sistemele de masă constantă cît şi pentru acelea de masă variabilă, însă ecuaţiile de mişcare au, aparent, o formă diferită datorită intervenţiei unor termeni ce corespund particulelor emise sau captate de către sistemul material.

Ecuaţia de mişcare a unui punct cu masa variabilă se poate pune sub forma dată de I.V. Meşcerski şi T. Levi-Civita

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm}{dt}\bar{u}\ , \tag{16.1}$$

sau

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} + \frac{dm}{dt}(\bar{v} + \bar{u})\ , \tag{16.2}$$

în care masa punctului este o funcţie $m(t) \in C^1$, iar $\bar{u}$ reprezintă viteza relativă, faţă de punctul material de bază, a particulei emisă sau captată de către acesta. Dacă punctul material este supus la legături, atunci în (16.1) şi (16.2), pe lîngă forţa dată $\bar{F}$, se introduce o forţă de legătură necunoscută $\bar{L}$. Ecuaţiile (16.1) şi (16.2) sînt valabile într-un reper inerţial. Expresia $\frac{dm}{dt}\bar{u}$ se numeşte forţă reactivă.

In cazul unei rachete, al cărui model mecanic îl constituie punctul de masă variabilă, se admite că viteza relativă $\bar{u}$ are mărimea constantă, este tangentă la traiectoria punctului

material şi orientată în sens contrar mişcării, deci

(16.3) $$\bar{u} = -u\bar{\tau} = -\frac{u}{v}\bar{v}\,, \quad u = \text{const.},$$

$\bar{\tau}$ fiind versorul tangentei la traiectorie.

Dacă în timpul mişcării punctul material captează şi emite simultan cîte o particulă de masă dm_1, respectiv dm_2, cu vitezele relative $\bar{u}_1$, respectiv $\bar{u}_2$, cele două procese fiind independente între ele, atunci ecuaţia de mişcare are forma

(16.4) $$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm_1}{dt}\bar{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\bar{u}_2\,,$$

sau

(16.5) $$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} + \frac{dm_1}{dt}(\bar{v}+\bar{u}_1) + \frac{dm_2}{dt}(\bar{v}+\bar{u}_2),\ dm = dm_1 + dm_2\,.$$

322. Masa M, fixată la extremitatea P a unui lanţ omogen, este plasată împreună cu lanţul pe un plan orizontal, astfel încît o parte OP a lanţului este rect. linie, iar partea rămasă este încolăcită în jurul punctului O. Se imprimă masei M o mişcare în direcţia de la O la P cu o viteză dată şi se presupune că ulterior M se mişcă rectiliniu şi trage după sine lanţul. Să se determine mişcarea.

Rezolvare. Această problemă a fost pusă şi rezolvată în anul 1869 de A. Cayley. El a numit un asemenea model mecanic „problemă cu impuls continuu".

Din enunţul problemei rezultă că masa M împreună cu porţiunea OP a lanţului se mişcă pe o dreaptă orizontală care trece prin punctul fix O. Notăm cu Ox axa care are drept suport această dreaptă şi sensul pozitiv dat de mişcarea lui P. Alegem momentul iniţial ca origine a timpului.

Lanţul dat îl considerăm ca un fir flexibil şi inextensibil. Fie b lungimea totală a lanţului, ρ densitatea sa (masa unităţii de lungime), a lungimea iniţială a lui OP şi v_0 viteza iniţială.

Dacă însemnăm cu x abscisa capătului mobil P al lanţului la momentul t (x este lungimea lui OP la momentul t), atunci viteza oricărui punct al porţiunii OP a lanţului va fi egală cu viteza punctului P, adică $v=\dot{x}$. Astfel, mişcarea sistemului mecanic dat se reduce la mişcarea unui punct situat la extremitatea P a lanţului şi a cărui masă este

$$(1)\qquad m = \begin{cases} M + \rho x & , \text{ pentru } x \in [a,b], \\ M + \rho b & , \text{ pentru } x \in [b,+\infty) , \end{cases}$$

ρ fiind o constantă.

Aşadar, dacă $x \in [a,b]$ este vorba despre mişcarea unui punct de masă variabilă. Condiţiile iniţiale în acest caz sînt

$$(2)\qquad t = 0, \quad x = a, \quad \dot{x} = v_0 .$$

Deoarece forţa activă $\bar{F}$ este nulă, iar viteza faţă de punctul P a particulei lanţului care se pune în mişcare la momentul t este $-\dot{x}$, ecuaţia (16.1) se reduce la

$$(3)\qquad m\ddot{x} = -\dot{m}\dot{x} .$$

Din (1) şi (3) obţinem ecuaţia diferenţială

$$(4)\qquad (M + \rho x)\ddot{x} + \rho\dot{x}^2 = 0 ,$$

sau

$$(4')\qquad M\ddot{x} + \rho\frac{d}{dt}(x\dot{x}) = 0 .$$

Prin integrarea ecuaţiei (4'), în baza condiţiilor (2), rezultă

$$(5)\qquad (M + \rho x)\dot{x} = (M + \rho a)v_0$$

şi

$$(6)\qquad \left[M + \frac{\rho}{2}(x + a)\right](x-a) = (M + \rho a)v_0 t .$$

Egalitatea (5) poate fi obţinută direct, folosind faptul că impulsul sistemului format din masa M şi porţiunea de lanţ OP la momentul t este constant, deoarece $\bar{F} = 0$.

Dacă punem $x = b$ în (6), deducem momentul la care întreg lanţul intră în mişcare. După acest moment sistemul mecanic

dat are masa constantă şi un punct oarecare al său se mişcă uniform cu viteza

$$v = \frac{M+\rho a}{M+\rho b} v_0 \ , \ v < v_0 \ .$$

323. Un lanţ omogen se desfăşoară din ghemul Γ care se află în repaus la marginea plăcii plane orizontale (π_1), fără nici un efort şi cade pe verticală datorită greutăţii proprii pe planul orizontal (π_2). Să se studieze mişcarea lanţului.

Rezolvare. Considerăm lanţul dat ca un fir flexibil şi inextensibil. Fie b distanţa dintre planele (π_1) şi (π_2), a lungimea totală a lanţului şi ρ densitatea sa. Presupunem că $b < a$. Notăm cu P capătul mobil al lanţului şi cu O punctul în care lanţul părăseşte în cădere placa (π_1). Luăm drept axă Ox verticala punctului O dirijată în jos şi alegem momentul iniţial ca origine a timpului. Fie t_1 momentul la care lanţul atinge cu extremitatea sa P planul (π_2), t_2 momentul la care se termină desfăşurarea lanţului din ghemul Γ şi t_3 momentul la care întreg lanţul ajunge pe planul (π_2).

In continuare vom considera separat următoarele cazuri:

1° $t \in [0, t_1]$, 2° $t \in [t_1, t_2]$ şi 3° $t \in [t_2, t_3]$.

Primul caz a fost studiat de A. Cayley în anul 1857. Problema lui Cayley reprezintă din punct de vedere istoric prima problemă de mecanică cu masa variabilă. El a numit asemenea modele mecanice „probleme cu ciocniri continue". Cazurile 2° şi 3° au fost studiate de I.V. Meşcerski în anul 1904.

1°. Dacă însemnăm cu x abscisa capătului mobil P al lanţului la momentul t, atunci viteza oricărui punct de pe porţiunea OP a lanţului va fi egală cu $\dot{x}$. Presupunem că la momentul iniţial punctul P se află în O, deci avem următoarele condiţii iniţiale

(1) $$t = 0 , \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0 .$$

Pentru aflarea mişcării porţiunii OP din lanţ cu masa variabilă (crescătoare), este suficient să cunoaştem mişcarea punctului P. Masa punctului P la momentul t este $m = \frac{\rho}{g} x$, iar forţa care acţionează asupra sa are expresia $F = mg = \rho x$. Deoarece viteza faţă de punctul P a particulei lanţului care la momentul t se află în O este $-\dot{x}$, rezultă că ecuaţia (16.1) conduce la

(2) $$x\ddot{x} = gx - \dot{x}^2 .$$

Egalitatea (2) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{d}{dt}(x\dot{x}) = gx ,$$

sau

(2') $$x\dot{x}\frac{d}{dx}(x\dot{x}) = gx^2 .$$

Ecuaţia (2') se integrează imediat şi, împreună cu (1), dă

(3) $$\dot{x}^2 = \frac{2g}{3} x ,$$

de unde obţinem, dacă ţinem seama de (1) ,

(4) $$x = \frac{gt^2}{6} , \quad t \in [0, t_1] .$$

Pentru $x = h$ găsim $t_1 = \sqrt{\frac{6h}{g}}$.

Observaţii. α) Ecuaţia (2) poate fi dedusă şi prin aplicarea teoremei impulsului (v. relaţia (13.8)) porţiunii OP din lanţ.

β) Dacă presupunem că la momentul iniţial punctul P se află în repaus la distanţa $b < h$ de O, atunci ecuaţia (2') se înlocuieşte cu $$x^2\dot{x}^2 = \frac{2g}{3}(x^3 - b^3) .$$

γ) Formula (4) ne arată că punctul P se mişcă la fel ca un punct cu masa constantă, lansat din O fără viteză şi solicitat de o forţă coliniară cu axa Ox şi de mărime $\frac{g}{3}$.

δ) Soluţia (4) nu este unică, deoarece ecuaţia (2) şi condiţiile iniţiale (1) sînt satisfăcute şi de $x \equiv 0$. In legătură

cu aceasta a se vedea problema 151.

2^0. In acest caz partea mobilă a lanţului are lungimea constantă şi egală cu h, iar masa egală cu ρh. Considerăm mişcarea unui punct Q al lanţului care la momentul $t=t_1$ se află în O. Notăm cu x abscisa punctului Q la momentul $t \in [t_1, t_2]$, astfel încât $x \in [0,h]$. Viteza oricărui punct de pe partea mobilă a lanţului este $\dot{x}$.

Condiţiile iniţiale corespunzătoare acestui caz sînt

(5) $$t=t_1 , \quad x=0, \quad \dot{x} = 0 .$$

In orice moment al mişcării la partea mobilă din lanţ se ataşează o particulă cu viteza relativă nulă şi se detaşează o particulă cu viteza relativă egală cu $\dot{x}$. Mărimea masei care se ataşează în intervalul de timp $[t_1,t]$ este egală cu mărimea masei care se detaşează în acelaşi interval de timp, iar mărimea comună este ρx.

Pentru studiul acestei mişcări vom utiliza ecuaţia (16.4) proiectată pe axa Ox. Din cele de mai sus rezultă

$$m = \rho h , \quad \frac{dm_1}{dt} = \rho\dot{x}, \quad \frac{dm_2}{dt} = -\rho\dot{x}, \quad F = \rho hg, \quad u_1=0, \quad u_2=\dot{x} ,$$

prin urmare, ecuaţia (16.4) conduce la

(6) $$\ddot{x} = g - \frac{1}{h}\dot{x}^2 .$$

Relaţia (6) are aceeaşi formă cu ecuaţia de mişcare a unui punct material greu cu masă constantă, care cade vertical şi întîmpină o rezistenţă din partea aerului de mărime $\frac{m}{h}\dot{x}^2$ (v. problema 159).

Ecuaţia diferenţială (6) se integrează la fel ca ecuaţia $(5')_1$ de la problema 159. Din (6) şi (5) obţinem

(7) $$\dot{x} = \sqrt{gh}\ \mathrm{th}\ \sqrt{\frac{g}{h}}(t-t_1)$$

(8) $$x = h \ln\left[\mathrm{ch}\sqrt{\frac{g}{h}}(t-t_1)\right], \quad t \in [t_1, t_2].$$

Dacă punem în (8) $x=h$, deducem pentru t_2 valoarea

$$t_2 = \sqrt{\frac{h}{g}}\left[6 + \ln(e + \sqrt{e^2-1})\right].$$

3°. De data aceasta partea mobilă a lanţului are lungimea variabilă, deci şi masa sa este variabilă (descrescătoare). Fie $x \in [0,h]$ distanţa de la capătul superior al lanţului - care a părăsit placa (π_1) - pînă la punctul O, la momentul $t \in [t_2,t_3]$. Masa părţii mobile din lanţ la momentul t este $\rho(h-x)$, astfel încît masa care se detaşează are viteza relativă nulă şi ecuaţia (16.1) se reduce la

$$\ddot{x} = g. \tag{9}$$

Condiţiile iniţiale în cazul de faţă sînt

$$t = t_2,\ x = 0,\ \dot{x} = \sqrt{\frac{gh(e^2-1)}{e}}, \tag{10}$$

valoarea lui $\dot{x}$ fiind dedusă din (7) pentru $t=t_2$.

Prin urmare, avem

$$x = \frac{1}{2}g(t-t_2)^2 + (t-t_2)\sqrt{\frac{gh(e^2-1)}{e}}, \quad t \in [t_2,t_3]. \tag{11}$$

Cantitatea t_3 este rădăcina, mai mare decît t_2, a ecuaţiei în t care se obţine punînd în (11) $x = h$.

324. Să se studieze mişcarea unei nave cu reacţie determinată de acţiunea pompei A care absoarbe apa de la pro ră (partea de dinainte a navei), apa trece printr-un canal orizontal situat în corpul vasului şi este aruncată afară prin partea opusă (v.fig.43). Se presupune că rezistenţa apei faţă de mişcarea navei este proporţională cu pătratul vitezei, iar viteza iniţială a navei este nulă.

Rezolvare. O navă de acest tip constituie un sistem mecanic cu masa constantă, deoarece este absorbită tot atîta cantitate de apă cît este evacuată. În cazul de faţă avem o mişcare

rectilinie. Luăm axa Ox al cărui vector $\bar{i}$ este orientat în sensul mişcării navei. Dacă notăm cu x abscisa unui punct al navei la momentul t, atunci viteza oricărui punct al navei este $\bar{v} = \dot{x}\bar{i}$. Putem alege punctul O astfel încît condiţiile iniţiale ale acestei probleme să fie

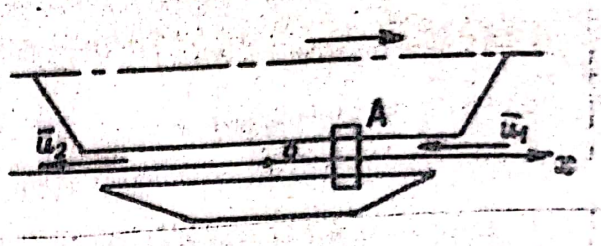

Fig.43

$$t = 0, \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0 . \tag{1}$$

Fie $\bar{u}_1$ viteza relativă a particulelor de apă care intră în canal şi $\bar{u}_2$ viteza relativă a particulelor evacuate. Presupunem că $\bar{u}_1$ şi $\bar{u}_2$ sînt de forma (16.3), deci avem

$$\bar{u}_\alpha = -u_\alpha \bar{i} , \quad u_\alpha = \text{const.} > 0, \quad \alpha = 1,2. \tag{2}$$

Notăm cu μ masa apei care trece prin orificiul de intrare în canal în unitate de timp, pentru o viteză egală cu unitatea şi cu σ raportul dintre aria secţiunii de intrare în canal şi aria secţiunii de ieşire. Rezultă că masa de apă absorbită în canal în intervalul de timp $[0,t]$ şi masa de apă evacuată în acelaşi interval de timp, au respectiv expresiile

$$m_1 = \mu u_1 t , \qquad m_2 = \frac{1}{\sigma} \mu u_2 t . \tag{3}$$

Deoarece masa de apă conţinută în canal se conservă în timpul mişcării, avem $m_1 = m_2$ şi, prin urmare ,

$$u_2 = \sigma u_1 . \tag{4}$$

De asemenea, din (3) şi (4) deducem

$$\frac{dm_1}{dt} = \mu u_1 , \quad \frac{dm_2}{dt} = -\mu u_1 , \tag{5}$$

unde masa $\frac{dm_2}{dt}$ a apei evacuată din canal în unitate de timp am considerat-o negativă.

Dacă însemnăm prin m masa navei şi a apei din canal şi prin k^2 mărimea rezistenţei apei pentru o viteză egală cu unitatea, atunci ecuaţia (16.4) conduce la

$$m\ddot{x} = -k^2\dot{x}^2 + \mu(\sigma - 1)u_1^2 . \tag{6}$$

Din ecuaţia (6) rezultă că pentru ca viteza navei să nu se micşoreze este necesar ca $\sigma > 1$, adică aria orificiului de intrare în canal trebuie să fie mai mare decît aria orificiului de ieşire. Atunci vom avea şi $u_1 < u_2$.

In continuare presupunem $\sigma > 1$ şi punem pentru prescurtare

$$\omega^2 = \frac{k^2}{m} , \quad q^2 = \frac{\mu(\sigma - 1)}{m} .$$

Astfel ecuaţia (6) devine

$$\ddot{x} = q^2u_1^2 - \omega^2\dot{x}^2 . \tag{7}$$

Facem observaţia că ecuaţia (7) şi condiţiile iniţiale (1) din cazul de faţă, sînt de aceeaşi formă cu ecuaţia (6) şi condiţiile iniţiale (5) de la problema 323. Prin urmare, avem

$$\dot{x} = \frac{q}{\omega} u_1 \operatorname{th}(q\omega u_1 t) , \tag{8}$$

$$x = \frac{1}{\omega^2} \ln\left[\operatorname{ch}(q\omega u_1 t)\right] . \tag{9}$$

Deoarece atunci cînd t creşte de la 0 la $+\infty$, funcţia $\operatorname{th}(q\omega u_1 t)$ creşte de la 0 la 1, din (8) deducem că viteza navei $v = \dot{x} \in \left[0, \frac{q}{\omega} u_1\right]$. Aşadar, viteza tinde asimptotic la $\frac{q}{\omega} u_1$. Pentru $q \leq \omega$ viteza navei nu poate deveni niciodată egală cu u_1, iar dacă $q > \omega$ viteza navei devine egală cu u_1 la momentul

$$t_1 = \frac{1}{2q\omega u_1} \ln \frac{q + \omega}{q - \omega} . \tag{10}$$

Egalitatea (10) ne arată că timpul necesar pentru ca nava să obţină viteza u_1, determinată de lucrul pompei, este invers proporţional cu mărimea acestei viteze. Spaţiul parcurs de navă

în intervalul de timp $[0,t_1]$ este

$$x_1 = \frac{1}{\omega^2} \ln \frac{q}{\sqrt{q^2-\omega^2}} .$$

Observație. Dacă presupunem că viteza inițială a navei este $v_0 < u_1$, atunci în locul ecuațiilor (8) și (10) avem respectiv

$$(8') \qquad \dot{x} = \frac{qu_1}{\omega} \cdot \frac{\omega v_0 + qu_1 th(q\omega u_1 t)}{qu_1 + \omega v_0 th(q\omega u_1 t)} ,$$

$$(10') \qquad t_1 = \frac{1}{2q\omega u_1} \ln \frac{(q+\omega)(qu_1 - \omega v_0)}{(q-\omega)(qu_1 + \omega v_0)} .$$

325. Un punct material a cărui masă este o funcție dată de timp, se mișcă în vid. Viteza relativă a particulelor emise are mărimea constantă, este coliniară cu viteza punctului și are sensul opus mișcării. Să se studieze mișcarea punctului în următoarele două cazuri :

1° Forțele externe sînt neglijabile.

2° Punctul este greu și se mișcă pe verticală în sus.

Rezolvare. Această problemă a fost studiată de K.E. Țiolkovski și reprezintă schematic mișcarea unei rachete. Cazul 1° se numește prima problemă a lui Țiolkovski, iar cazul 2° se numește problema a doua a lui Țiolkovski sau problema fundamentală a rachetei cu reacție.

Din enunț rezultă că viteza relativă a particulelor emise este de forma (16.3). Notăm cu $\bar{v}_0$ viteza inițială a punctului și presupunem că legea de variație a masei este

$$(1) \qquad m = m_0 f(t) , \quad f(0) = 1 ,$$

m_0 fiind masa punctului la momentul inițial $t=0$.

1° In acest caz ecuația de mișcare (16.1) are forma

$$(2) \qquad m\dot{\bar{v}} = -u\dot{m}\frac{\bar{v}}{v} , \quad u=\text{const.}$$

în intervalul de timp $[0,t_1]$ este

$$x_1 = \frac{1}{\omega^2} \ln \frac{q}{\sqrt{q^2-\omega^2}} .$$

Observație. Dacă presupunem că viteza inițială a navei este $v_0 < u_1$, atunci în locul ecuațiilor (8) și (10) avem respectiv

$$(8') \qquad \dot{x} = \frac{qu_1}{\omega} \cdot \frac{\omega v_0 + qu_1 th(q\omega u_1 t)}{qu_1 + \omega v_0 th(q\omega u_1 t)} ,$$

$$(10') \qquad t_1 = \frac{1}{2q\omega u_1} \ln \frac{(q+\omega)(qu_1-\omega v_0)}{(q-\omega)(qu_1+\omega v_0)} .$$

325. Un punct material a cărui masă este o funcție dată de timp, se mișcă în vid. Viteza relativă a particulelor emise are mărimea constantă, este coliniară cu viteza punctului și are sensul opus mișcării. Să se studieze mișcarea punctului în următoarele două cazuri :

1° Forțele externe sînt neglijabile.

2° Punctul este greu și se mișcă pe verticală în sus.

Rezolvare. Această problemă a fost studiată de K.E.Țiolkovski și reprezintă schematic mișcarea unei rachete. Cazul 1° se numește prima problemă a lui Țiolkovski, iar cazul 2° se numește problema a doua a lui Țiolkovski sau problema fundamentală a rachetei cu reacție.

Din enunț rezultă că viteza relativă a particulelor emise este de forma (16.3). Notăm cu $\bar{v}_0$ viteza inițială a punctului și presupunem că legea de variație a masei este

$$(1) \qquad m = m_0 f(t) , \quad f(0) = 1 ,$$

m_0 fiind masa punctului la momentul inițial $t=0$.

1° In acest caz ecuația de mișcare (16.1) are forma

$$(2) \qquad m\dot{\bar{v}} = -u\dot{m}\frac{\bar{v}}{v} , \quad u=const.$$

Relaţia (2) ne arată că acceleraţia punctului material este coliniară cu viteza sa, prin urmare, mişcare este rectilinie (v. problema 16) şi are ecuaţia diferenţială

(3) $$\dot{v} = -uf(t)/f(t) .$$

Fie Ox axa pe care se mişcă punctul material, avînd ca versor pe $\frac{\bar{v}_0}{v_0}$. Dacă notăm cu x abscisa mobilului la momentul t, atunci condiţiile iniţiale sînt

(4) $$t=0 , \quad x=x_0 , \quad \dot{x} = v_0 .$$

Din ecuaţiile (3) şi (4) deducem

(5) $$v = v_0 - u \ln f(t) ,$$

sau

(6) $$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m} ,$$

formulă datorată lui Ţiolkovski.

Deoarece $v=\dot{x}$, prin integrarea ecuaţiei diferenţiale (5), în condiţiile iniţiale (4), obţinem

(7) $$x = x_0 + v_0 t - u \int_0^t \ln f(\tau) d\tau .$$

De exemplu, în cazul variaţiei liniare a masei $f(t)=1-\alpha t$, $\alpha = const. > 0$, avem

(7') $$x=x_0+(v_0+u)t + \frac{u}{\alpha}(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) , \quad t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right] ,$$

iar în cazul legii exponenţiale a masei $f(t) = e^{-\alpha t}$, $\alpha = const. > 0$, găsim

(7'') $$x = x_0 + v_0 t + \frac{\alpha u t^2}{2} .$$

În continuare presupunem că $v_0=0$. Fie m_s masa punctului la sfîrşitul procesului de emisie (combustie) şi μ masa emisă a particulelor de combustibil. Atunci, la sfîrşitul arderii, mobilul are viteza

(8) $$v_s = u \ln(1 + Z) \cong 2,3\, u \lg(1 + Z) ,$$

în care raportul $Z = \frac{\mu}{m_s}$ se numeşte numărul lui Ţiolkovski.

In cazul unei rachete se ia $u = 2.000$ m/s.

Din formula (8) rezultă următoarele concluzii :

a) Viteza punctului de masă variabilă la sfîrşitul segmentului activ (sfîrşitul procesului de combustie) v_s este proporţională cu viteza relativă u de emisie.

b) Viteza v_s creşte logaritmic cu numărul lui Ţiolkovski.

c) Viteza v_s nu depinde de legea de variaţie a masei (regimul de lucru al motorului).

Prin urmare, pentru a obţine viteze mari ale punctului de masă variabilă este mai avantajos să mărim viteza relativă u decît să mărim pe Z. In acest scop, trebuie să se perfecţioneze motorul rachetei şi să se aleagă în mod convenabil combustibilul utilizat.

De asemenea, formula (6) permite calcularea masei necesare pentru ca punctul cu masă variabilă, care porneşte din repaus ($v_o=0$), să atingă o viteză dată v_1, urmînd ca apoi prin inversarea cu 180° a sensului vitezei de emisie (frînare reactivă) viteza v_1 să fie anihilată în vederea aterizării.

In mişcarea unui punct cu masă variabilă, în absenţa forţelor externe, micşorarea vitezei se poate realiza numai cu ajutorul forţei reactive, adică a consumului suplimentar al rezervei existente de masă.

Fie m_1 masa la momentul cînd punctul a atins viteza v_1 şi μ_1 masa emisă pînă la acest moment. Avem

$$v_1 = u \ln \frac{m_o}{m_1} = u \ln(1 + Z_1) , \quad Z_1 = \mu_1/m_1 . \tag{9}$$

Dacă schimbăm semnul lui u, atunci forţa reactivă va frîna mişcarea, iar viteza punctului va fi dată de relaţia

(10) $$v = v_1 - u \ln \frac{m_1}{m} .$$

Notînd cu m_2 masa punctului pentru $v=0$, rezultă

(11) $$v_1 = u \ln \frac{m_1}{m_2} = u \ln(1 + Z_2) , \quad Z_2 = \mu_2/m_2 ,$$

μ_2 fiind masa emisă de la momentul frînării reactive şi pînă la momentul cînd punctul se opreşte.

Din compararea egalităţilor (9) şi (11) deducem

$$\frac{m_o}{m_1} = \frac{m_1}{m_2} , \quad Z_1 = Z_2 .$$

Deoarece $m_o = m_2 + \mu_1 + \mu_2$, atunci rezerva totală a masei este definită de numărul $Z = \frac{\mu}{m_2}$, în care $\mu = \mu_1 + \mu_2$ şi avem

$$\frac{m_o}{m_2} = (\frac{m_1}{m_2})^2 = 1 + \frac{\mu}{m_2} = (1 + \frac{\mu_2}{m_2})^2 ,$$

de unde

$$1 + Z = (1 + Z_1)^2 ,$$

formulă care ne permite să determinăm numărul Z, dacă se cunoaşte v_1 .

2^o Fie Ox axa verticală ascendentă pe care se mişcă punctul considerat. In acest caz ecuaţia de mişcare (16.1) devine

(12) $$\dot{v} = -g - u\dot{f}(t)/f(t) ,$$

iar condiţiile iniţiale au forma (4).

Din (12) şi (4), prin integrare, obţinem succesiv

(13) $$v = v_o - gt - u \ln f(t) ,$$

(14) $$x = x_o + v_o t - \frac{1}{2} gt^2 - u \int_o^t \ln f(\tau)\, d\tau .$$

In particular, pentru legea liniară a masei de la punctul 1^o, avem

(14') $$x = x_o + (v_o + u)t - \frac{1}{2} gt^2 + \frac{u}{\alpha}(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) , \quad t \in [0, \frac{1}{\alpha}] ,$$

iar pentru legea exponenţială găsim

(14") $$x = x_o + v_o t - \frac{1}{2}(g - \alpha u)t^2 .$$

Înălțimea maximă la care se poate ridica punctul material se obține din (14), pentru valoarea lui t care anulează expresia (13) a vitezei. De exemplu, în cazul legii exponențiale, rezultă

(15) $$t_{max} = \frac{v_0}{g - \alpha u}, \quad \text{cu} \quad \alpha u < g .$$

Condiția $\alpha u < g$ exprimă faptul că mărimea forței reactive trebuie să fie mai mică decît greutatea punctului, adică $\left|\frac{dm}{dt}\right| u < mg$. Atunci ecuația (14") reprezintă legea de mișcare a unui punct de masă constantă, într-un cîmp atractiv uniform cu accelerația $g - \alpha u$.

Înlocuind valoarea lui t_{max} din (15) în formula (14"), aflăm înălțimea maximă la care se poate ridica mobilul

$$x_{max} = x_0 + \frac{v_0^2}{2(g - \alpha u)} .$$

326. In cazul unui cărucior care se mișcă pe șine, se poate utiliza drept frînă un lanț, care este încolăcit pe pămînt și are un capăt fixat, prin intermediul unui cîrlig, de cărucior. Presupunem că acest sistem mecanic coboară pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, în timpul mișcării lanțul se tîrăște pe pămînt și dacă lanțul este suficient de lung, după un timp cărucioarul se oprește.

Să se afle în ce caz are loc oprirea și distanța la care se produce ea.

Rezolvare. Această problemă a fost rezolvată de I.V.Meșcerski în anul 1904. Presupunem că mișcarea cărucioarului pe șine este fără frecare și notăm cu n coeficientul de frecare a lanțului pe pămînt. Luăm masa unității de lungime a lanțului ca

unitate de masă şi însemnăm prin m_0 masa căruciorului.

Fie O punctul în jurul căruia este înfăşurat lanţul şi Ox axa pe care se deplasează căruciorul, orientată în sensul mişcării. Sistemul format din cărucior şi porţiunea de lanţ în mişcare îl considerăm ca un punct cu masa variabilă

$$m = m_0 + x \,, \tag{1}$$

unde x reprezintă lungimea porţiunii de lanţ în mişcare. Presupunem că această lungime este mai mică decît lungimea totală a lanţului.

Masa m, care este obligată să se mişte pe axa Ox, reprezintă un punct cu masă variabilă supus la legături cu frecare. Prin urmare, introducem în membrul secund al ecuaţiei (16.1) o forţă de legătură necunoscută $\bar{L}$ şi aplicăm legile lui Coulomb asupra frecării (v.cap.VIII). Astfel mişcarea lui m este dată de

$$m\dot{\bar{v}} = m\bar{g} + \dot{x}\bar{u} - \Phi\frac{\bar{v}}{v} + \bar{N} \,, \quad \Phi = fN, \quad \bar{\Phi}\cdot\bar{N} = 0 \,, \tag{2}$$

unde $\bar{u} = -\bar{v}$, iar coeficientul de frecare f este nul pentru masa m_0 şi egal cu n pentru masa x a porţiunii mobile de lanţ.

Dacă proiectăm ecuaţia vectorială (2) pe axa Ox şi pe axa perpendiculară pe Ox , conţinută în planul vertical al lui Ox şi care face cu $\bar{g}$ un unghi obtuz, găsim

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \dot{x}^2 - \Phi \,, \quad N = mg\cos\alpha \,. \tag{3}$$

Din cele de mai sus rezultă

$$\Phi = f(m_0+x)g\cos\alpha = ngx\cos\alpha \,,$$

aşa încît din (3) deducem ecuaţia de mişcare

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - nxg\cos\alpha - \dot{x}^2 \,. \tag{4}$$

Deoarece avem

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} \,,$$

ecuaţiile (1) şi (4) conduc la

(5) $$\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} + \frac{2}{x+m_o}\dot{x}^2 = 2g\sin\alpha - 2n\frac{x}{x+m_o}g\cos\alpha \ .$$

Egalitatea (5) reprezintă o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul I, cu funcţia necunoscută $\dot{x}^2$ şi variabila independentă x. Prin integrarea ecuaţiei (5) obţinem

(6) $$\frac{3\dot{x}^2}{g\cos\alpha} = 3nm_o+2(k-n)(x+m_o)-\left(\frac{m_o}{x+m_o}\right)^2\left(nm_o+2m_ok - \frac{3v_o^2}{g\cos\alpha}\right),$$

unde $k = tg\alpha$, iar v_o este valoarea lui $\dot{x}$ pentru $x=0$.

Cu ajutorul relaţiei (6) putem vedea în ce caz este posibilă oprirea căruciorului şi putem afla distanţa la care are loc aceasta.

Dacă punem $\dot{x} = 0$ în (6), atunci găsim ecuaţia pe care o verifică distanţa x la care se opreşte căruciorul

(7) $$f(x)=2(k-n)x^3+3m_o(2k-n)x^2+6km_o^2x + \frac{3m_o^2v_o^2}{g\cos\alpha} = 0 \ .$$

In cazul $k \geqslant n$, toţi coeficienţii ecuaţiei (7) sînt pozitivi, prin urmare, această ecuaţie nu are nici o rădăcină pozitivă şi căruciorul nu se opreşte.

Pentru $k<n$ ecuaţia (7) are o rădăcină pozitivă. Astfel, dacă lungimea lanţului este suficient de mare, condiţia necesară şi suficientă pentru oprirea căruciorului este ca tangenta unghiului de înclinare a drumului faţă de orizontală să fie mai mică decît coeficientul de frecare.

Rădăcina pozitivă a ecuaţiei (7) o putem separa cu ajutorul şirului lui Rolle. După cum se poate vedea uşor, zerourile funcţiei $f'(x)$ sînt $x_1 = -m_o < 0$ şi $x_2 = \frac{k}{n-k}m_o > 0$.

Astfel, şirul lui Rolle pentru polinomul $f(x)$ este

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$f(-m_o)$	$+$	$-$

,

în care

$$f(-m_0) = \frac{3m_0^2 v_0^2}{g\cos\alpha} - (2k+n)m_0^3 .$$

Cum $f(0)>0$, rezultă că ecuaţia (7) are o singură rădăcină pozitivă pe care o notăm cu h şi avem

$$h > \frac{k}{n-k} m_0 .$$

Ecuaţia (7) are toate rădăcinile reale, sau are o singură rădăcină reală, după cum viteza iniţială v_0 satisface relaţia

(8) $$v_0^2 \leq \frac{1}{3}(2k+n)m_0 g\cos\alpha ,$$

sau

(9) $$v_0^2 > \frac{1}{3}(2k+n)m_0 g\cos\alpha .$$

Pentru a preciza mai mult pe h vom utiliza metoda trigonometrică de rezolvare a ecuaţiei (7). În acest scop, cu ajutorul schimbării de variabilă

$$x = \frac{y+2k-n}{2(n-k)} m_0 ,$$

ecuaţia (7) se reduce la forma

(10) $$y^3 - 3n^2 y + 2(n^3+4k^3-6k^2n) - \frac{12(n-k)^2 v_0^2}{m_0 g\cos\alpha} = 0 .$$

Vrem să rezolvăm ecuaţia (10) fără a folosi formula lui Cardan. Să căutăm soluţia ecuaţiei (10) sub forma $y=r\cos\theta$. Atunci obţinem ecuaţia

(11) $$\cos^3\theta - 3\frac{n^2}{r^2}\cos\theta - \frac{2}{r^3}\left[\frac{6(n-k)^2 v_0^2}{m_0 g\cos\alpha} + 6k^2n - n^3 - 4k^3\right] = 0 .$$

Având în vedere identitatea

$$\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta = 0 ,$$

deducem că ecuaţia (10) are rădăcinile de forma căutată dacă şi numai dacă avem

$$r = 2n , \quad \cos 3\theta = 1+2\frac{(n-k)^2}{n^3}\left(\frac{3v_0^2}{m_0 g\cos\alpha} - n - 2k\right) .$$

Pentru ca să existe θ , este necesar şi suficient să aibă loc relaţia (8). Deci, în acest caz putem aplica metoda trigonometrică de rezolvare a ecuaţiei (7).

Deoarece $y \leq 2n$, rezultă că, dacă viteza iniţială verifică inegalitatea (8), atunci avem

$$(*) \qquad \frac{k}{n-k} m_0 < h < \frac{n+2k}{2(n-k)} m_0 ,$$

iar dacă v_0 satisface egalitatea (8), găsim

$$h = \frac{n+2k}{2(n-k)} m_0 .$$

In cazul cînd are loc inegalitatea (9), obţinem

$f(\frac{n+2k}{2(n-k)} m_0) > 0$, de unde deducem o margine inferioară pentru h, mai apropiată decît cea indicată mai sus

$$h > \frac{n+2k}{2(n-k)} m_0 .$$

Observaţii. 1^0 Dacă $v_0 = 0$, atunci h satisface inegalităţile $(*)$, deoarece este verificată inegalitatea (8). Acest caz poate fi considerat şi direct, ţinînd seama de faptul că ecuaţia (7) se reduce la

$$2(k-n)x^2+3m_0(2k-n)x+6km_0^2 = 0 .$$

2^0 In cazul în care cărucioarul se mişcă pe o dreaptă orizontală, avem $k=0$ şi $\cos \alpha = 1$, iar ecuaţia (7) devine

$$\frac{v_0^2}{ng} = \frac{1}{3}(2x + 3m_0) \frac{x^2}{m_0^2} ,$$

formulă datorată lui E. Routh.

327. Să se studieze mişcarea verticală ascendentă a unui punct de masă variabilă $m(t)$, care este solicitat, în afara greutăţii proprii, de o forţă $\bar{p}(t)$ îndreptată vertical în sus şi de rezistenţa mediului $-R(v)\bar{v}/v$. Se presupune că viteza relativă $\bar{u}$ este îndreptată pe verticală în jos şi are mărimea dată $u(t)$.

Rezolvare. Această problemă a fost rezolvată de I.V. Meşcerski în anul 1897 şi reprezintă schematic mişcarea unei rachete. In timpul cît racheta zboară în sus, masa ei se micşorează ca urmare a arderii combustibilului pe care îl transportă. Forţele care acţionează asupra rachetei sînt: forţa de greutate, rezistenţa aerului, presiunea gazelor care iau naştere prin arderea combustibilului şi forţa suplimentară, provenită din faptul că particulele care ard se desprind cu o anumită viteză relativă.

Pentru distanţele obişnuite la care rachetele se îndepărtează de suprafaţa Pămîntului, putem considera acceleraţia gravitaţiei g constantă.

Fie Ox axa verticală ascendentă pe care se mişcă racheta. Dacă notăm cu x înălţimea mobilului la momentul t, atunci ecuaţia de mişcare (16.1) se reduce la

$$(1) \qquad m\ddot{x} = -mg + p - R(\dot{x}) - \dot{m}u .$$

Deoarece masa m , presiunea p şi viteza relativă u sînt funcţii date de timp, rezultă că egalitatea (1) este o ecuaţie diferenţială de ordinul I relativă la $\dot{x}$. In cazul cînd rezistenţa aerului este proporţională cu pătratul vitezei, atunci relaţia (1) este o ecuaţie diferenţială Riccati.

Dacă rezistenţa aerului se poate exprima sub forma $a\dot{x}+b$, în care a şi b sînt constante, atunci egalitatea (1) reprezintă o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul I, relativă la $\dot{x}$

$$(2) \qquad \frac{d\dot{x}}{dt} = -g + \frac{p}{m} - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}u - \frac{1}{m}(a\dot{x} + b) .$$

In cazul cînd arderea în rachetă se face uniform în timp, avem

$$(3) \qquad m = m_0(1 - \alpha t) , \quad \alpha = \text{const.} > 0 .$$

Presupunînd, în plus, că p şi u sînt constante, din ecuaţia (2) obţinem următoarea expresie pentru viteza punctului

(4) $$\dot{x} = \frac{p+\alpha u m_0 - b}{a} t + \frac{g}{\alpha(1-\mu)}(1-\alpha t) + C_1(1-\alpha t)^{\mu},$$

unde $\mu = \frac{a}{\alpha m_0}$, iar C_1 este o constantă arbitrară.

Din (4) deducem

$$x = -\frac{p+\alpha u m_0 - b}{a}(1-\alpha t) - \frac{g}{2\alpha^2(1-\mu)}(1-\alpha t)^2 -$$

$$- \frac{C_1}{\alpha(1+\mu)}(1-\alpha t)^{1+\mu} + C_2,$$

în care C_2 este o constantă arbitrară.

328. Să se studieze mişcarea verticală ascendentă a unui punct material greu, solicitat de o forţă constantă îndreptată vertical în sus şi care întîmpină o rezistenţă din partea mediului proporţională cu pătratul vitezei. Se presupune că masa punctului creşte proporţional cu înălţimea.

Rezolvare. Această problemă a fost rezolvată de I.V.Meşcerski în anul 1897 şi reprezintă în mod simplificat mişcarea unui aerostat. In cazul unui aerostat variaţia masei se poate datora unor cauze diferite, cum ar fi, de exemplu, aruncarea balastului, expulzarea gazelor, udarea sau uscarea învelişului ş.a. Dacă aerostatul este captiv (legat de pămînt printr-un cablu), atunci în timpul ascensiunii masa sa creşte prin mărirea lungimii cablului legat de el. Se admite că rezistenţa aerului este proporţională cu pătratul vitezei, iar forţa ascensională a lui Arhimede (egală cu greutatea volumului de aer deslocuit) este constantă.

Fie m masa aerostatului, adică masa întregului echipament, gaze şi partea de cablu care atîrnă, p greutatea volumului de aer deslocuit şi k rezistenţa aerului corespunzătoare unităţii de viteză.

Dacă notăm cu Ox axa verticală ascendentă pe care se mişcă mobilul şi cu x înălţimea aerostatului la momentul t, atunci masa aerostatului poate fi exprimată prin formula

(1) $$m = m_0(1 + \alpha x) , \quad \alpha = \text{const.} > 0 .$$

Presupunem că sulul pe care este înfăşurat cablul, se roteşte cu o astfel de viteză unghiulară, încît partea de cablu care se desfăşoară, să aibă în fiecare moment viteza egală cu aceea a aerostatului, deci u=0. In acest caz ecuaţia de mişcare (16.1) conduce la

(2) $$\ddot{x} = -g + \frac{p}{m_0(1+\alpha x)} - \frac{k}{m_0(1+\alpha x)} \dot{x}^2 ,$$

sau

(2') $$\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} + \frac{2k}{m_0(1+\alpha x)} \dot{x}^2 = -2g + \frac{2p}{m_0(1+\alpha x)} .$$

Relaţia (2') este o ecuaţie diferenţială de ordinul I, relativă la funcţia $\dot{x}^2$. Prin integrarea ecuaţiei (2') obţinem

(3) $$\dot{x}^2 = \frac{p}{k} - \frac{2g}{\alpha(1+\mu)}(1 + \alpha x) + C(1+\alpha x)^{-\mu} , \quad \mu = \frac{2k}{\alpha m_0} ,$$

C fiind o constantă arbitrară.

Luînd condiţiile iniţiale de forma

$$t = 0, \quad x = 0 , \quad \dot{x} = 0 ,$$

rezultă

(3') $$\dot{x}^2 = \frac{p}{k}\left[1-(1+\alpha x)^{-\mu}\right] - \frac{2g}{\alpha(1+\mu)}(1+\alpha x)\left[1-(1+\alpha x)^{-1-\mu}\right] .$$

Din ecuaţia (3) sau din ecuaţia (3'), înălţimea punctului x se exprimă în funcţie de t printr-o cuadratură.

Observaţii 1°. Dacă presupunem că greutatea volumului de aer deplasat descreşte proporţional cu înălţimea, adică

$$p = p_0(1 - \beta x) , \quad \beta = \text{const.} > 0 ,$$

atunci ecuaţia de mişcare este tot de forma (2).

In adevăr, în acest caz avem

$$\frac{p}{m} = \frac{p_0}{\alpha m_0}\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha x} - \beta\right),$$

deci ecuaţia de mişcare este

$$\ddot{x} = -g - \frac{\beta p_0}{\alpha m_0} + \frac{(\alpha+\beta)p_0}{\alpha m_0}\cdot\frac{1}{1+\alpha x} - \frac{k}{m_0(1+\alpha x)}\dot{x}^2 .$$

Această ecuaţie diferă de ecuaţia (2), numai prin faptul că în locul lui g aici intră $g + \frac{\beta p_0}{\alpha m_0}$, iar în locul lui p apare $\frac{\alpha+\beta}{\alpha} p_0$.

2° Considerăm cazul în care cablul nu se desfăşoară de pe sul, cu viteza unghiulară precizată mai sus, dar presupunem că are un capăt fixat de aerostat, iar partea care nu este încă trasă de acesta, stă nemişcată pe pământ (caz similar cu problemele 322, 323 şi 326).

In acest caz $u = -\dot{x}$ şi ecuaţia de mişcare este

$$\ddot{x} = -g + \frac{p}{m_0(1+\alpha x)} - \frac{k+\alpha m_0}{m_0(1+\alpha x)}\dot{x}^2 . \tag{4}$$

Această ecuaţie diferă de ecuaţia (2), numai prin faptul că în locul constantei k aici avem constanta $k+\alpha m_0$.

Ecuaţia (4) exprimă mişcarea aerostatului în tot intervalul de timp, în care înălţimea la care s-a ridicat este mai mică decît lungimea cablului.

3° Pentru un aerostat liber se presupunem că masa m, greutatea volumului de aer deslocuit p şi coeficientul de rezistenţă k, sînt funcţii de x. Astfel ecuaţia de mişcare are forma

$$m\ddot{x} = -mg + p - k\dot{x}^2 ,$$

sau

$$\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} = -2g + \frac{p(x)}{m(x)} - \frac{k(x)}{m(x)}\dot{x}^2 ,$$

deci, este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul I, relativă la $\dot{x}^2$.

329. Să se studieze mişcarea verticală ascendentă a unui punct cu masa variabilă după legea $m=m_0-\mu t$, $\mu>0$, presupunînd acceleraţia greutăţii constantă şi viteza absolută a particulelor detaşate tot constantă.

Rezolvare. Această problemă a fost rezolvată de G.Lampariello în anul 1948. Fie Ox axa verticală ascendentă pe care se mişcă punctul.

Notăm cu w mărimea constantă a vitezei absolute a particulelor detaşate. Sensul vitezei absolute este opus mişcării punctului. In acest caz folosim ecuaţia (16.2) care devine

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -mg - w\frac{dm}{dt} \quad , \tag{1}$$

sau

$$m\ddot{x} - \mu\dot{x} = -mg + \mu w \, . \tag{2}$$

Condiţiile iniţiale le luăm de forma

$$t = 0, \quad x = R \, , \quad \dot{x} = 0 \, , \tag{3}$$

R fiind raza Pămîntului.

Dacă facem notaţiile

$$\tau = \frac{m}{\mu} \, , \quad \tau_0 = \frac{m_0}{\mu} \, ,$$

avem $\tau = \tau_0 - t$, iar ecuaţia (2) conduce la

$$\frac{d}{d\tau}\left(\tau\frac{dx}{d\tau}\right) = w - g\tau \, . \tag{4}$$

Din (4), prin integrare, obţinem

$$\frac{dx}{d\tau} = w - \frac{1}{2}g\tau - \left(w - \frac{1}{2}g\tau_0\right)\frac{\tau_0}{\tau}$$

şi, apoi

$$x = \left(w - \frac{1}{4}g\tau\right)\tau - \left(w - \frac{1}{4}g\tau_0\right)\tau_0 - \left(w - \frac{1}{2}g\tau_0\right)\tau_0 \ln\frac{\tau}{\tau_0} \, .$$

Revenind la variabila independentă t, avem

$$x = R - kt - \frac{1}{4}gt^2 - k\tau_0\ln\left(1 - \frac{t}{\tau_0}\right) \, , \quad t \in [0, \tau_0),$$

unde $k = w - \frac{1}{2}g\tau_0$.

Capitolul XVII

TEORIA PERCUŢIILOR

Fenomenul fizic în care impulsul (deci şi viteza) unui corp variază brusc datorită unei forţe de mărime foarte mare care acţionează pe o durată foarte mică se numeşte percuţie sau ciocnire. Modelul matematic al fenomenului de percutare se defineşte cu ajutorul modelului fizic respectiv printr-un proces de trecere la limită.

Considerăm un punct material asupra căruia acţionează o forţă $\bar{F}$, de mărime foarte mare, într-un interval de timp foarte scurt $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, astfel încît integrala

$$\bar{\Pi} = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \bar{F}\, dt$$

să fie de mărime mărginită pentru orice $\varepsilon > 0$. Forţa $\bar{F}$ se numeşte forţă instantanee, iar $\bar{\Pi}$ se numeşte vector-percusiune (sau simplu percusiune) a forţei $\bar{F}$ în intervalul de timp $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$.

Din ecuaţia lui Newton (6.2) se deduce

$$m\left[\bar{v}(t_0+\varepsilon) - \bar{v}(t_0-\varepsilon)\right] = \bar{\Pi}, \tag{17.1}$$

deci, variaţia impulsului punctului material este egală cu percusiunea forţei aplicate în intervalul de timp considerat.

Dacă

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \bar{v}(t_0-\varepsilon) = \bar{v}(t_0-0), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{v}(t_0+\varepsilon) = \bar{v}(t_0+0) \quad \text{şi}$$

$$\bar{v}(t_0-0) \neq \bar{v}(t_0+0) \neq \bar{v}(t_0) \neq \bar{v}(t_0-0),$$

atunci din formula (17.1) rezultă

(17.2) $$\Delta(m\bar{v}) = \bar{P}(t_0) ,$$

unde

$$\Delta(m\bar{v}) = m\bar{v}(t_0+0) - m\bar{v}(t_0-0), \bar{P}(t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \bar{F}dt \neq 0 .$$

Vectorul $\bar{P}(t_0)$ se numeşte forţă percutantă sau percusiune care se aplică punctului material la momentul t_0. In fenomenul ciocnirii forţele care nu sînt instantanee se neglijează, deoarece percusiunea unei astfel de forţă este nulă. Formula (17.2) constituie o relaţie de salt (discontinuitate) la momentul t_0 şi arată că saltul impulsului punctului material este egal cu forţa percutantă aplicată la momentul t_0.

In cursul ciocnirii punctul material nu se deplasează căci avem

$$\bar{r}(t_0 - 0) = \bar{r}(t_0 + 0) = \bar{r}(t_0) .$$

De asemenea, are loc egalitatea

(17.3) $$\Delta(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r}(t_0) \times \bar{P}(t_0) ,$$

adică saltul momentului cinetic este egal cu momentul forţei percutante aplicate la momentul t_0.

In problemele în care se dau forţa instantanee $\bar{F}$ ca funcţie numai de variabila t şi viteza $\bar{v}(t_0 - 0)$ înainte de ciocnire, din ecuaţia (17.2) se poate determina viteza corespunzătoare $\bar{v}(t_0 + 0)$ după ciocnire. Tot aşa, cînd se dau $\bar{F}(t)$ şi $\bar{v}(t_0+0)$ putem afla pe $\bar{v}(t_0 - 0)$. Dacă forţa instantanee nu este cunoscută apriori, însă se dă saltul vitezei la momentul t_0, atunci formula (17.2) defineşte forţa percutantă $\bar{P}(t_0)$.

Fie un sistem material cu un număr finit de grade de libertate asupra căruia acţionează în intervalul de timp $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ un sistem de forţe instantanee. Acestui sistem de forţe instantanee îi corespunde un sistem de forţe percutante, care se clasifică pe de o parte în forţe percutante date şi forţe percutante

de legătură necunoscute, pe de altă parte în forţe percutante externe şi forţe percutante interne. Forţele percutante interne satisfac principiul acţiunii şi reacţiunii. In cazul unui sistem material continuu distribuţia forţelor percutante este reprezentată printr-o forţă percutantă specifică de masă sau de volum (v.cap.XII).

Dacă notăm cu $\overline{\mathcal{R}}$ şi $\overline{\mathcal{M}}$ rezultanta şi momentul rezultant faţă de polul O ale forţelor percutante exte:ne date, iar cu $\overline{\mathcal{R}}'$ şi $\overline{\mathcal{M}}'$ rezultanta şi momentul rezoltant faţă de punctul O ale forţelor percutante externe de legătură, atunci în cursul fenomenului de percutare au loc următoarele relaţii de salt:

(17.4) $$\Delta\overline{I} = \overline{\mathcal{R}} + \overline{\mathcal{R}}' ,$$

adică saltul impulsului total al unui sistem material este egal cu rezultanta forţelor percutate externe şi

(17.5) $$\Delta\overline{K} = \overline{\mathcal{M}} + \overline{\mathcal{M}}' ,$$

deci, saltul momentului cinetic total al unui sistem material este egal cu momentul rezultant a forţelor percutante externe.

Formula (17.4) se poate scrie sub formă echivalentă

(17.6) $$\Delta(M\overline{v}^*) = \overline{\mathcal{R}} + \overline{\mathcal{R}}' ,$$

prin urmare, saltul impulsului centrului de masă al unui sistem material este egal cu rezultanta forţelor percutante externe.

Egalităţile (17.2)-(17.6) sînt valabile şi faţă de un reper neinerţial care are o mişcare continuă în raport cu un reper inerţial. Ecuaţiile (17.2)-(17.6) sînt mult mai simple din punct de vedere analitic decît ecuaţiile corespunzătoare unei mişcări continue. In locul unor ecuaţii diferenţiale avem relaţii sub formă finită şi liniare în necunoscutele problemei (vitezele după ciocnire şi forţele percutante de legătură)

In general ecuaţiile precedente sînt insuficiente pentru determinarea soluţiei unei probleme de ciocniri, fapt ce marchează limitele domeniului de aplicaţie a teoriei simpliste schiţată mai sus şi care are în vedere fenomenul global al ciocnirii. Pentru unele cazuri speciale sistemul de ecuaţii respectiv poate fi completat cu ajutorul unor ipoteze suplimentare.

Un caz important îl constituie ciocnirea punctuală a două rigide (S_1) şi (S_2). Orientăm spre (S_1) normala comună $\overline{n}$ în punctul de contact şi notăm cu v_{1n} proiecţia pe normală a vitezei relative $\overline{v}_1$ a punctului de contact, viteză definită în mişcarea lui (S_1) faţă de (S_2) (v.cap.V). La începutul ciocnirii v_{1n} are o valoare $v_{1n}(t_0-0)<0$, iar la sfîrşitul ciocnirii are o valoare $v_{1n}(t_0+0)\geq 0$. Nedeterminarea care apare în acest caz depinde numai de proprietăţile fizice ale corpurilor în contact. Introducem ca o condiţie caracteristică la sfîrşitul ciocnirii relaţia

$$v_{1n}(t_0+0) = -ev_{1n}(t_0-0) \ , \ e\in[0,1] \ , \tag{17.7}$$

în care factorul e, numit coeficient de restituire, se determină experimental. Pentru $e = 0$ ciocnirea se numeşte plastică (iar corpurile în contact se numesc moi), pentru $0<e<1$ ciocnirea se numeşte naturală, iar pentru $e = 1$ avem o ciocnire elastică. Relaţia (17.7) reprezintă ipoteza lui Newton.

Un rezultat elegant în teoria percuţiilor este dat de

Teorema lui Carnot. Fie un sistem mecanic supus la ciocniri, fără să intervină nici o forţă percutantă dată, deci prin introducerea bruscă de legături noi. Dacă aceste legături noi persistă după ciocnire (sau au coeficienţii de restituire nuli)

şi dacă toate legăturile sînt bilaterale, scleronome şi fără frecare, atunci energia cinetică pierdută este egală cu energia cinetică a vitezelor pierdute, adică

(17.8) $E(t_0 - 0) - E(t_0 + 0) = E(\Delta\bar{v})$, sau $-\Delta E(\bar{v}) = E(\Delta\bar{v})$,

unde $E(t_0-0)$ este energia cinetică totală înainte de ciocnire, $E(t_0+0)$ este energia cinetică totală după ciocnire, iar $E(\Delta\bar{v})$ este energia cinetică pe care ar avea-o sistemul dacă fiecare particulă a sa ar avea o viteză egală cu saltul vitezei sale în cursul ciocnirii (care se numeşte încă viteză pierdută).

Spre deosebire de ecuaţiile (17.4) şi (17.5) care sînt liniare, relaţia (17.8) este de gradul doi în raport cu necunoscutele (vitezele după ciocnire), fapt ce reduce importanţa ei practică.

In cazul unui rigid, din (17.4) şi (17.5) rezultă următoarele relaţii de salt:

1. Dacă rigidul este liber

(17.9) $\qquad M\Delta\bar{v}^* = \bar{\mathcal{R}}$, $I_{ij}\Delta\omega_j = \mathcal{M}_i$, $(i,j=1,2,3)$,

sistemul de coordonate avînd originea în centrul de masă al rigidului.

2. Pentru un rigid cu un punct fix

(17.10) $M(\bar{e}_i \times \bar{r}^*)\Delta\omega_i = \bar{\mathcal{R}} + \bar{L}$, $I_{ii}\Delta\omega_i = \mathcal{M}_i$ (nesumat), $i=1,2,3$,

în care $\bar{L}$ este forţa percutantă de legătură aplicată în punctul fix O, iar reperul este format din axe principale de inerţie.

3. Pentru un rigid cu o axă fixă

(17.11) $$\begin{cases} I_{33}\Delta\omega = \mathcal{M}_3 \ , \ M(\bar{e}_3 \times \bar{r}^*)\Delta\omega = \bar{\mathcal{R}} + \bar{L} + \bar{L}' \ , \\ I_{\alpha 3}\Delta\omega = \mathcal{M}_\alpha + h(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_3, \bar{L}'), \quad \alpha = 1,2, \quad h = \overline{OO'} \ , \end{cases}$$

unde $\bar{L}$ şi $\bar{L}'$ sînt forţele percutante de legătură aplicate în punctele fixe O şi O' (v. şi cap. XIV).

Pentru prescurtarea scrierii în continuare vom utiliza notaţiile

$$\bar{v}(t_0+0)=\bar{v}^+\ ,\quad \bar{v}(t_0-0)=\bar{v}^-\ ,$$

sau alte notaţii specificate în cadrul problemei respective.

330. Două bare rectilinii A_1O şi OA_2, omogene, de aceeaşi masă m şi de aceeaşi lungime 2a, sînt articulate în punctul O. Presupunînd că barele sînt în repaus una în prelungirea celeilalte şi că în punctul A_2 se aplică o forţă percutantă $\bar{P}$, să se afle distribuţia vitezelor în bare după percutare.

Rezolvare. In cursul ciocnirii sistemul mecanic format din cele două bare nu se deplasează. Considerăm reperul cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$, a cărui axă Ox_1 este coliniară cu vectorul $\overline{OA}_1$, iar planul x_1Ox_2 conţine forţa percutantă dată $\bar{P}$.

Asupra barei OA_2 acţionează, în fara lui $\bar{P}(P_1,P_2,0)$, o forţă percutantă necunoscută $\bar{L}(L_1,L_2,L_3)$ din partea lui OA_1, aplicată în O. Bara OA_1 este solicitată numai de forţa percutantă $-\bar{L}$ în punctul O.

Distribuţia vitezelor în barele date, după percutare, este determinată de viteza $\bar{v}_o(v_1^o,v_2^o,v_3^o)$ a punctului O şi de vectorii rotaţiilor instantanee $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ ai barelor OA_1 şi OA_2. Cum prin adăugarea la $\bar{\omega}_\alpha$ a unui vector coliniar cu $\overrightarrow{OA}_\alpha$ nu este afectată distribuţia de viteze (v. problema 88), putem presupune că $\bar{\omega}_\alpha$ este perpendicular pe $\overrightarrow{OA}_\alpha$, deci $\bar{\omega}_\alpha$ are componentele $(0,\omega_{\alpha 2},\omega_{\alpha 3})$, $\alpha=1,2$. Cantităţile v_i^o, $i=1,2,3$ şi $\omega_{\alpha 2},\omega_{\alpha 3}$, $\alpha=1,2$ sînt necunoscutele problemei. Pentru determinarea lor vom scrie relaţiile de salt (17.4) şi (17.5) pentru fiecare bară în parte. Ecuaţiile astfel obţinute vor conţine şi necunoscutele auxiliare L_i, $i=1,2,3$.

Notăm cu $\bar{r}_\alpha^*,\bar{v}_\alpha^+,\bar{I}_\alpha$ şi $\bar{K}_\alpha$ respectiv, vectorul de poziţie

al centrului de masă, viteza centrului de masă, impulsul total şi momentul cinetic total faţă de punctul O, ale barei OA_α, $\alpha = 1,2$, după ciocnire. Rezultă

(1) $\bar{r}_1^* = a\bar{e}_1$, $\bar{v}_1^* = \bar{v}_0 + a(\omega_{13}\bar{e}_2 - \omega_{12}\bar{e}_3)$, $\bar{I}_1 = m\bar{v}_1^*$,

(2) $\bar{r}_2^* = -a\bar{e}_1$, $\bar{v}_2^* = \bar{v}_0 - a(\omega_{23}\bar{e}_2 - \omega_{22}\bar{e}_3)$, $\bar{I}_2 = m\bar{v}_2^*$.

Teorema lui König (13.5) dă

(3) $\bar{K}_\alpha = \bar{K}_\alpha^* + m(\bar{r}_\alpha^* \times \bar{v}_\alpha^*)$, $\bar{K}_\alpha^* = \frac{1}{3}a^2 m\omega_\alpha^2$, $\alpha = 1,2$,

$\bar{K}_\alpha^*$ fiind momentul cinetic al barei OA_α faţă de mijlocul său.

Deoarece $\Delta\bar{I}_\alpha = \bar{I}_\alpha$, $\Delta\bar{K}_\alpha = \bar{K}_\alpha$, $\alpha = 1,2$, iar momentul lui $\bar{P}$ faţă de O este $\bar{m} = -2aP_2\bar{e}_3$, relaţiile (17.4) şi (17.5) conduc la

(4) $m\left[\bar{v}_0 + a(\omega_{13}\bar{e}_2 - \omega_{12}\bar{e}_3)\right] = -\bar{L}$, $v_2^0 + \frac{4}{3}a\omega_{13} = 0$, $v_3^0 - \frac{4}{3}a\omega_{12} = 0$

şi

(5) $m\left[\bar{v}_0 - a(\omega_{23}\bar{e}_2 - \omega_{22}\bar{e}_3)\right] = \bar{P} + \bar{L}$, $v_2^0 - \frac{4}{3}a\omega_{23} = \frac{2P_2}{m}$, $v_3^0 + \frac{4}{3}a\omega_{22} = 0$.

Din ecuaţiile (4) şi (5) deducem

$$v_3^0 = \omega_{12} = \omega_{22} = L_3 = 0,$$

prin urmare, problema este plană şi

(6) $\bar{v}_0 = \frac{1}{2m}(P_1\bar{e}_1 - 2P_2\bar{e}_2)$, $\bar{\omega}_1 = \frac{3}{4am}P_2\bar{e}_3$, $\bar{\omega}_2 = -\frac{9}{4am}P_2\bar{e}_3$,

iar $$\bar{L} = \frac{1}{4}(-2P_1\bar{e}_1 + P_2\bar{e}_2).$$

Formulele (6) rezolvă problema. In particular, vitezele punctelor A_1 şi A_2 după ciocnire sînt respectiv

$$\frac{\bar{P}}{2m} \text{ şi } \frac{\bar{P}}{2m} + \frac{3P_2\bar{e}_2}{m}.$$

Observaţie. Din problemele de tipul celei de faţă reiese un mod în care se pot realiza practic datele iniţiale ale unei probleme dinamice.

331. Două bare rectilinii OA_1 şi A_1A_2, omogene, de aceeaşi masă m şi de aceeaşi lungime 2a, sînt articulate în punctul A_1

şi se pot mişca în jurul punctului fix O. Presupunînd că barele sînt în linie dreaptă în repaus şi că într-un punct B al barei A_1A_2 se aplică o forţă percutantă $\bar{P}$ normală la A_1A_2, să se afle distribuţia vitezelor în bare după percutare şi reacţiunile care apar în O şi A_1 în timpul ciocnirii.

Rezolvare. Această problemă este legată de aceea a unui pendul dublu. Luăm reperul cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$ astfel ca axa Ox_1 să fie coliniară cu vectorul $\vec{OA}_1$ şi axa Ox_2 să aibă direcţia şi sensul forţei percutante date $\bar{P}$. Notăm cu b distanţa $\overline{A_1B}$.

Asupra barei A_1A_2 acţionează forţa percutantă dată $\bar{P}(0,P,0)$ şi forţa percutantă necunoscută $\bar{L}(L_1,L_2,L_3)$ aplicate respectiv în B şi A_1. Bara OA_1 este solicitată de forţa percutantă $-\bar{L}$ şi de forţa percutantă necunoscută $\bar{L}_o(L_1^o,L_2^o,L_3^o)$, aplicate respectiv în A_1 şi O.

După percutare, distribuţia vitezelor în cele două bare este determinată de vectorii rotaţiilor momentane $\bar{\omega}_1$ şi $\bar{\omega}_2$ ai barelor OA_1 şi A_1A_2. La fel ca la problema 330, putem presupune că vectorul $\bar{\omega}_\alpha$ are componentele $(0, \omega_{\alpha 2}, \omega_{\alpha 3})$, $\alpha = 1,2$. Pentru găsirea necunoscutelor $\omega_{\alpha 2}, \omega_{\alpha 3}$, $\alpha = 1,2$ şi L_i, L_i^o, $i = 1,2,3$, vom impune relaţiile de salt (17.4) şi (17.5) pentru fiecare bară în parte.

Utilizăm notaţiile de la problema 330, cu precizarea că locul barei OA_2 este luat în cazul de faţă de bara A_1A_2. Astfel avem

(1) $\quad \bar{r}_1^* = a\bar{e}_1,\ \bar{v}_1^* = a(\omega_{13}\bar{e}_2 - \omega_{12}\bar{e}_3),\ \bar{I}_1 = m\bar{v}_1^*,$

(2) $\quad \bar{r}_2^* = 3a\bar{e}_1,\ \bar{v}_2^* = 2\bar{v}_1 + a(\omega_{23}\bar{e}_2 - \omega_{22}\bar{e}_3),\ \bar{I}_2^* = m\bar{v}_2^*,$

(3) $\quad \bar{K}_1 = \frac{4}{3}a^2m\bar{\omega}_1,\ \bar{K}_2 = \frac{2}{3}a^2m(9\bar{\omega}_1 + 5\bar{\omega}_2).$

Momentele lui $\bar{P}$ și $\bar{L}$ față de O au respectiv expresiile

(4) $\quad \bar{\mathcal{M}} = (2a+b)P\bar{e}_3 \ , \quad \bar{\mathcal{M}}' = 2a(L_2\bar{e}_3 - L_3\bar{e}_2)$

și deoarece $\Delta\bar{I}_\alpha = \bar{I}_\alpha$, $\Delta\bar{K}_\alpha = \bar{K}_\alpha$, obținem următoarele ecuații

(5) $$\begin{cases} \mathrm{am}(\omega_{13}\bar{e}_2 - \omega_{12}\bar{e}_3) = \bar{L}_0 - \bar{L} \ , \\ \frac{2}{3}\mathrm{am}\,\bar{\omega}_1 = L_3\bar{e}_2 - L_2\bar{e}_3 \ , \\ \mathrm{am}\left[(2\omega_{13}+\omega_{23})\bar{e}_2 - (2\omega_{12}+\omega_{22})\bar{e}_3\right] = \bar{P} + \bar{L} \ , \\ \frac{2}{3}a^2\mathrm{m}(9\,\bar{\omega}_1+5\bar{\omega}_2) = (2a+b)P\bar{e}_3 + 2a(L_2\bar{e}_3 - L_3\bar{e}_2) \ . \end{cases}$$

Egalitățile (5) dau

$$\omega_{12} = \omega_{22} = L_1 = L_3 = L_1^0 = L_3^0 = 0 \ ,$$

deci problema este plană și avem

(6) $$\bar{\omega}_1 = \frac{3(4a-3b)}{14a^2\mathrm{m}}P\bar{e}_3 \ , \quad \bar{\omega}_2 = \frac{3(4b-3a)}{7a^2\mathrm{m}}P\bar{e}_3 \ ,$$

(7) $$\bar{L} = -2\bar{L}_0 = \frac{3b-4a}{7a}\bar{P} \ .$$

In particular, din (6) deducem că $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ dacă și numai dacă $b = \frac{10}{11}a$.

332. Se consideră două discuri omogene de raze R_1 și R_2 situate în același plan. Discurile se rotesc uniform în jurul centrelor lor O_1 și O_2, în același sens, cu vitezele unghiulare ω_1^- și ω_2^- și sînt înfășurate cu un fir inextensibil care nu este întins. La un moment dat firul se întinde și se produce o percutare. Să se afle vitezele ungiulare ω_1^+ și ω_2^+ pe care le capătă discurile, în ipoteza că firul rămîne întins după ciocnire.

Rezolvare. Faptul că firul rămîne întins după ciocnire revine la relația

(1) $$R_1\omega_1^+ = R_2\omega_2^+ \ ,$$

deoarece mărimea vitezei unui punct al firului este egală cu mărimea vitezei periferice a celor două discuri (admiţînd că nu există alunecare între fir şi discuri).

Pentru determinarea necunoscutelor ω_1^+ şi ω_2^+ avem nevoie de încă o ecuaţie, pe care o putem obţine prin una din metodele următoare :

Metoda I. Problema de faţă satisface condiţiile teoremei lui Carnot, prin urmare, putem utiliza relaţia de şoc (17.8).

După cum se poate vedea uşor, energia cinetică pierdută este

$$-\Delta E = \frac{1}{4}\left[m_1R_1^2(\omega_1^-)^2+m_2R_2^2(\omega_2^-)^2-m_1R_1^2(\omega_1^+)^2-m_2R_2^2(\omega_2^+)^2\right],$$

unde m_1 şi m_2 sînt masele celor două discuri.

Pe de altă parte, energia cinetică a vitezelor pierdute are expresia

$$E(\Delta\bar{v}) = \frac{1}{4}\left[m_1R_1^2(\omega_1^- - \omega_1^+)^2 + m_2R_2^2(\omega_2^- - \omega_2^+)^2\right],$$

astfel încît deducem egalitatea

$$(2)\quad m_1R_1^2(\omega_1^+)^2+m_2R_2^2(\omega_2^+)^2 = m_1R_1^2\omega_1^-\omega_1^+ + m_2R_2^2\omega_2^-\omega_2^+ .$$

Din ecuaţiile (1) şi (2) rezultă

$$(3)\quad R_1\omega_1^+ = R_2\omega_2^+ = \frac{m_1R_1\omega_1^- + R_2m_2\omega_2^-}{m_1+m_2} .$$

Metoda II. In timpul ciocnirii asupra primului disc acţionează o forţă percutantă necunoscută $\bar{L}$, coliniară cu tangenta comună la cele două discuri şi aplicată în punctul de tangenţă al primului disc, iar al doilea disc este solicitat de $-\bar{L}$, aplicată în punctul de tangenţă al acestui disc. Vom impune relaţia de şoc (17.5) pentru fiecare disc în parte. Fiind vorba de o problemă plană, vom găsi cîte o ecuaţie pentru fiecare disc. Cum forţele percutante $\bar{L}$ şi $-\bar{L}$ sînt

perpendiculare pe razele discurilor respective în punctele de tangenţă cu firul, obţinem următoarele ecuaţii

$$(4)\quad \frac{1}{2}m_1R_1^2(\omega_1^- - \omega_1^+) = R_1L\ ,\ \frac{1}{2}m_2R_2^2(\omega_2^- - \omega_2^+) = -R_2L\ .$$

Prin eliminarea necunoscutei L din sistemul (4) rezultă ecuaţia

$$(5)\qquad m_1R_1\omega_1^+ + m_2R_2\omega_2^+ = m_1R_1\omega_1^- + m_2R_2\omega_2^-\ .$$

Evident, din (1) şi (5) regăsim formulele (3). In plus, deducem

$$L = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(R_1\omega_1^- - R_2\omega_2^-)\ .$$

333. Considerăm un rigid mobil în jurul punctului fix O şi presupunem că, brusc, se fixează un al doilea punct O' al corpului, astfel că singura mişcare posibilă a rigidului devine rotaţia în jurul axei OO'. Să se afle mărimea vitezei de rotaţie ω^+ după percutare.

Rezolvare. In acest caz putem aplica teorema lui Carnot, deoarece legătura nouă introdusă brusc este persistentă, iar ambele legături la care este supus rigidul (în O şi O') sînt bilaterale, scleronome şi fără frecare.

Luăm reperul $Ox_1x_2x_3$ format din axele principale de inerţie relative la punctul O. Momentele principale de inerţie I_{11}, I_{22}, I_{33} şi componentele vitezei unghiulare înainte de ciocnire ω_i^-, $i = 1,2,3$, sînt cunoscute. Dacă notăm cu $\bar{u}(u_1,u_2,u_3)$ versorul lui $\overrightarrow{OO'}$, atunci şi cantităţile u_1, u_2, u_3 sînt cunoscute, fiindcă O' este un punct determinat al corpului. Viteza unghiulară după ciocnire este de forma

$$\bar{\omega}^+ = \omega^+\bar{u}\ ,\ |\bar{u}| = 1\ .$$

Energia cinetică a rigidului se poate calcula cu ajutorul formulei (14.7) în care punem $\bar{v}_o = 0$ şi $I_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$.

Astfel teorema lui Carnot conduce la

$$I_{11}(\omega_1^-)^2+I_{22}(\omega_2^-)^2+I_{33}(\omega_3^-)^2-(I_{11}u_1^2+I_{22}u_2^2+I_{33}u_3^2)(\omega^+)^2 =$$

$$= I_{11}(\omega_1^- - u_1\omega^+)^2+I_{22}(\omega_2^- - u_2\omega^+)^2 + I_{33}(\omega_3^- - u_3\omega^+)^2 ,$$

de unde obţinem

$$\omega^+ = \frac{I_{11}u_1\omega_1^- + I_{22}u_2\omega_2^- + I_{33}u_3\omega_3^-}{I_{11}u_1^2 + I_{22}u_2^2 + I_{33}u_3^2} .$$

Rezultă că rigidul rămîne în repaus după percutare, adică $\omega^+ = 0$, dacă şi numai dacă $\bar{\omega}^-(\omega_1^-, \omega_2^-, \omega_3^-)$ şi $\bar{u}(u_1,u_2,u_3)$ definesc două direcţii conjugate în raport cu elipsoidul de inerţie relativ la punctul O, prin urmare

$$I_{11}u_1\omega_1^- + I_{22}u_2\omega_2^- + I_{33}u_3\omega_3^- = 0 .$$

334. Se consideră o bară rectilinie şi omogenă ale cărei extremităţi pot aluneca fără frecare pe două axe perpendiculare fixe Ox_1 şi Ox_2. La momentul t_0 un punct material de masă m, animat de viteza $\bar{v}(v_1,v_2)$, se încrustează pe bară, care este imobilă. Se cere mărimea vitezei unghiulare ω a sistemului după ciocnire.

Rezolvare. Fie $A_1(a_1,0)$ şi $A_2(0,a_2)$ extremităţile barei, iar $A(\frac{a_1}{1+k}, \frac{ka_2}{1+k})$, $k>0$, punctul de impact (punctul în care se produce ciocnirea).

Datorită ciocnirii, sistemului format din bară şi punctul material i se imprimă o rotaţie în jurul centrului instantaneu $I(a_1,a_2)$ al barei. Dacă notăm cu 2a lungimea barei şi cu M masa sa, atunci momentul de inerţie al barei în raport cu punctul I este $\frac{4}{3}Ma^2$, unde $4a^2 = a_1^2 + a_2^2$.

Pentru determinarea lui ω putem folosi relaţia de salt a momentului cinetic total (17.5). Deoarece extremităţile barei

alunecă fără frecare pe axele de coordonate, rezultă că forţele percutante necunoscute, care acţionează în punctele A_1 şi A_2, sînt coliniare respectiv cu vectorii $\overrightarrow{IA}_1$ şi $\overrightarrow{IA}_2$. Prin urmare, momentul rezultant al forţelor percutante externe (faţă de punctul I) este nul şi obţinem

$$(1) \qquad (\frac{4}{3}Ma^2 + m\overrightarrow{IA}^2)\omega\bar{e}_3 - m(\overrightarrow{IA}\times\bar{v}) = 0 .$$

Avînd în vedere că

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{1+k}(ka_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2) ,$$

egalitatea (1) conduce la

$$(2) \qquad \omega = \frac{3(1+k)(a_2v_1-ka_1v_2)m}{4Ma^2(1+k)^2+3m(k^2a_1^2+a_2^2)} .$$

Observaţie. Formula (2) poate fi dedusă şi cu ajutorul teoremei lui Carnot. In adevăr, în cazul de faţă energia cinetică pierdută este

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{2}{3}Ma^2\omega^2 - \frac{k^2a_1^2+a_2^2}{2(1+k)^2}m\omega^2 ,$$

iar energia cinetică a vitezelor pierdute are valoarea

$$\frac{2}{3}Ma^2\omega^2 + \frac{m}{2}[\bar{v} - \bar{\omega}\times\overrightarrow{IA}]^2 .$$

Egalînd aceste două expresii regăsim formula (2).

335. In planul x_1Ox_2 se consideră un cerc omogen de rază R şi de masă M, imobil în contact cu axa lucie Ox_1 (fig.2). La momentul t_0 un proiectil (asimilat cu un punct material) de masă m, avînd viteza $\bar{v}(v,0)$, loveşte cercul şi rămîne fixat de el. Să se afle distribuţia vitezelor după ciocnire.

Rezolvare. Vom impune relaţiile de salt pentru impulsul total (17.4) şi pentru momentul cinetic total (17.5), sistemului format din cerc şi proiectil. Forţele percutante care se exercită în punctul de impact P sînt interne, prin urmare, ele nu intervin în ecuaţiile respective. Astfel, vom lua în

consideraţie numai forţa percutantă de legătură $\bar{L}(0,L)$ necunoscută, care se aplică în punctul de contact A al cercului cu axa Ox_1 . Fie $\bar{v}_0(v_1^0, v_2^0)$ viteza centrului C al cercului şi ω mărimea vitezei unghiulare după ciocnire. Necunoscutele problemei sînt v_1^0, v_2^0, ω şi L .

Relaţia (17.4) revine la

$$(1) \qquad M\bar{v}_0 + m(\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overrightarrow{CP}) - m\bar{v} = \bar{L} ,$$

iar relaţia (17.5), în raport cu punctul C, are forma

$$(2) \quad MR^2 \omega \bar{e}_3 + m\overrightarrow{CP} \times (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overrightarrow{CP}) - m\overrightarrow{CP} \times \bar{v} = 0 .$$

Cum

$$\overrightarrow{CP} = -R(\bar{e}_1 \sin\theta + \bar{e}_2 \cos\theta), \quad \theta \in (0, \pi),$$

(v. problema 52), ecuaţiile (1) şi (2) dau sistemul

$$(3) \qquad \begin{cases} (m+M)v_1^0 + mR\omega\cos\theta = mv , \\ (m+M)v_2^0 - mR\omega\sin\theta = L , \\ (m+M)R\omega + m(v_1^0\cos\theta - v_2^0\sin\theta) = mv\cos\theta . \end{cases}$$

Aceste trei ecuaţii, care reprezintă tot ce putem obţine din teoremele generale ale teoriei percuţiilor, sînt insuficiente pentru rezolvarea problemei.

Pentru a putea determina cele patru necunoscute, facem observaţia că sînt posibile numai următoarele două cazuri :

1°. Cercul rămîne în contact cu axa Ox_1 şi după ciocnire. Atunci avem $v_2^0 = 0$ şi $L > 0$, iar din sistemul (3) deducem

$$(4) \qquad v_1^0 = \frac{(M+m\sin^2\theta)mv}{M^2+2Mm+m^2\sin^2\theta} , \quad R = \frac{Mmv\cos\theta}{M^2+2Mm+m^2\sin^2\theta} .$$

Rezultă că L, care trebuie să fie pozitiv, are semnul contrar lui ω . Prin urmare, soluţia găsită este acceptabilă numai pentru $\theta \in \left[\frac{\pi}{2} , \pi\right)$. Cu alte cuvinte, acest caz se întîmplă atunci şi numai atunci cînd punctul de impact se află deasupra punctului C .

2°. Cercul nu rămîne în contact cu axa Ox_1 după ciocnire. In acest caz vom avea $v_2^{\circ} > 0$ şi $L = 0$. Se găseşte

$$(5)\quad v_1^{\circ} = \frac{mv}{(m+M)(2m+M)}(m+M+m\sin^2\theta),\quad v_2^{\circ} = \frac{m^2 v \sin 2\theta}{2(m+M)(2m+M)},$$

$$R\omega = \frac{mv\cos\theta}{2m+M}.$$

Deoarece v_2° trebuie să fie pozitiv, rezultă că acest caz este posibil numai pentru $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci punctul de impact este sub C.

In concluzie, în funcţie de poziţia punctului de impact, este acceptabilă numai una dintre soluţii.

336. Trei sfere omogene (S_1), (S_2) şi (S_3), ale căror centre sînt coliniare, se află în repaus separate una de alta prin intervale mici. La un moment dat se imprimă sferei (S_1) o mişcare de translaţie, paralelă cu linia centrelor şi îndreptată spre (S_2). Astfel intervine o ciocnire mai întîi între (S_1) şi (S_2), iar apoi între (S_2) şi (S_3).

Presupunînd date viteza lui (S_1) înainte de ciocnire şi masele sferelor (S_1) şi (S_3), să se arate că viteza lui (S_3) după ciocnire este maximă dacă şi numai dacă masa sferei (S_2) este media geometrică între masele lui (S_1) şi (S_3).

Rezolvare. Această problemă aparţine lui Huygens. Ciocnirile succesive care se produc între (S_1) şi (S_2) şi între (S_2) şi (S_3) se numesc ciocniri centrice şi directe. In general, ciocnirea dintre două corpuri se numeşte centrică (sau centrală), dacă normala comună la suprafeţele corpurilor în punctul de contact trece prin centrele de masă ale corpurilor (cum este cazul a două sfere omogene). Ciocnirea dintre două corpuri se numeşte directă, dacă vitezele centrelor de masă ale corpurilor

înainte de ciocnire au direcţia normalei comune la cele două suprafeţe în punctul de contact.

Fie v_1 viteza sferei (S_1) înainte de percutare, m_1, m_2 şi m_3 masele celor trei sfere, e_1 coeficientul de restituire dintre sferele (S_1) şi (S_2), iar e_2 coeficientul de restituire dintre (S_2) şi (S_3). Cantităţile v_1, m_1, m_3, e_1 şi e_2 le presupunem cunoscute. In cursul celor două ciocniri nu apar forţe percutante externe.

Aplicăm relaţia de salt a impulsului total în cazul ciocnirii sferelor (S_1) şi (S_2). Dacă notăm cu v_1' şi v_2 vitezele pe care le dobîndesc aceste sfere după percutare, atunci din (17.4) şi (17.7) obţinem

$$(1) \qquad m_1 v_1' + m_2 v_2 = m_1 v_1 \ , \ v_1' - v_2 = -e_1 v_1 \ .$$

Sistemul (1) este echivalent cu

$$(2) \qquad v_1' = \frac{m_1 - e_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 \ , \quad v_2 = \frac{(1 + e_1) m_1}{m_1 + m_2} v_1 \ .$$

Pentru ciocnirea sferelor (S_2) şi (S_3) procedăm în acelaşi mod. Notînd cu v_2' şi v_3 vitezele sferelor (S_2) şi (S_3) după percutare, rezultă

$$(3) \qquad m_2 v_2' + m_3 v_3 = m_2 v_2 \ , \ v_2' - v_3 = -e_2 v_2 \ ,$$

de unde deducem

$$(4) \qquad v_2' = \frac{m_2 - e_2 m_3}{m_2 + m_3} v_2 \ , \quad v_3 = \frac{(1+e_2) m_2}{m_2 + m_3} v_2 \ .$$

Formulele $(2)_2$ şi $(4)_2$ dau

$$(5) \qquad v_3 = \frac{(1 + e_1)(1 + e_2) m_1 m_2}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)} v_1 \ .$$

Derivata lui v_3 în raport cu m_2 are expresia

$$\frac{dv_3}{dm_2} = (1+e_1)(1+e_2)\frac{m_1(m_1m_3-m_2^2)}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2}v_1 ,$$

prin urmare, $\frac{dv_3}{dm_2}$ este pozitivă, nulă, sau negativă, după cum m_2 este mai mic, egal, sau mai mare decît $\sqrt{m_1m_3}$. Aceasta ne arată că viteza v_3 este maximă dacă şi numai dacă avem $m_2 = \sqrt{m_1m_3}$. Valoarea maximă a lui v_3 este

$$v_{3max} = (1+e_1)(1+e_2)\left(\frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_3}}\right)^2 v_1 .$$

Observaţie. Raţionamentele şi concluzia de mai sus îşi pierd valabilitatea dacă $e_1 = 0$. In adevăr, în acest caz ecuaţiilor (2) se reduc la

$$(2') \qquad v_1' = v_2 = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2} ,$$

deci, sferele (S_1) şi (S_2) rămîn în contact după ciocnire. Atunci, în locul formulelor (3), avem

$$(3') \qquad (m_1+m_2)v_2'+m_3v_3 = (m_1+m_2)v_2 , \quad v_2' - v_3 = -e_2v_2 ,$$

de unde găsim

$$(5') \qquad v_3 = \frac{(1+e_2)m_1v_1}{m_1+m_2+m_3} .$$

Evident, în acest caz v_3 este maxim pentru $m_2 = 0$.

337. n sfere mici omogene (S_i), $i=\overline{1,n}$, ale căror centre sînt coliniare, sînt suspendate (în ordinea indicilor) cu n fire inextensibile verticale şi sînt separate între ele prin intervale mici.

Se deplasează sfera (S_1), în partea opusă lui (S_2), pînă cînd firul care o susţine face unghiul α cu verticala şi apoi este lăsată să cadă. Astfel se produce o succesiune de ciocniri între sferele date. Presupunînd cunoscute masele m_i

ale sferelor (S_i) , $i=\overline{1,n}$, lungimea ℓ a firului sferei (S_1), unghiul α şi coeficienţii de restituire e_i dintre sferele (S_i) şi (S_{i+1}) , $i=\overline{1,(n-1)}$, să se afle viteza dobîndită de sfera (S_n) după ciocnire.

Rezolvare. Sferele date le asimilăm cu puncte materiale. Sfera (S_1) cade de la înălţimea $\ell(1-\cos\alpha)$, fără viteză iniţială, se mişcă la fel ca un pendul matematic şi ajunge în poziţia cea mai de jos cu o viteză orizontală, îndreptată spre (S_2) şi de mărime cunoscută

$$v_1 = 2\sqrt{\ell g}\,\sin\frac{\alpha}{2} .$$

Deoarece distanţele dintre sfere sînt presupuse mici, putem admite că în momentul ciocnirii cu sfera (S_2) viteza lui (S_1) este coliniară cu linia centrelor sferelor, deci ciocnirile succesive sînt centrice şi directe.

Notăm cu v_i viteza sferei (S_i) după ciocnirea sa cu (S_{i-1}), $i=\overline{2,n}$ şi cu v_i' viteza sferei (S_i) după ciocnirea cu (S_{i+1}) , $i=\overline{1,(n-1)}$. Trebuie să determinăm pe v_n în funcţie de v_1 .

Să considerăm ciocnirea dintre sferele (S_i) şi (S_{i+1}) , $i=\overline{1,(n-1)}$. Procedînd în acelaşi mod ca la problema 336, din (17.4) şi (17.7) deducem

(1) $m_i v_i' + m_{i+1} v_{i+1} = m_i v_i$, $v_i' - v_{i+1} = -e_i v_i$, $i=\overline{1,(n-1)}$,

prin urmare

(2) $$v_i' = \frac{m_i - e_i m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}} v_i \ , \quad v_{i+1} = \frac{(1+e_i)m_i}{m_i+m_{i+1}} v_i \ , \quad i=\overline{1,(n-1)} .$$

Din relaţia $(2)_2$, prin recurenţă, obţinem

(3) $$v_i = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{(1+e_j)m_j}{m_j+m_{j+1}} v_1 \ , \quad i=\overline{2,n} .$$

In adevăr, pentru i=2 formula (3) coincide cu egalitatea $(2)_2$ de la problema 336, deci este verificată. Să presupunem

acum relaţia (3) adevărată pentru un i fixat. Ecuaţiile $(2)_2$ şi (3) conduc la

$$(3') \qquad v_{i+1} = \prod_{j=1}^{i} \frac{(1+e_j)m_j}{m_j+m_{j+1}} v_i \ , \quad i=\overline{1,(n-1)} \ .$$

Conform principiului inducţiei complete rezultă că formula (3) este adevărată pentru orice $i=\overline{2,n}$. Din (3) deducem

$$(4) \qquad v_n = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(1+e_i)m_i}{m_i+m_{i+1}} v_1 \ ,$$

care reprezintă viteza sferei (S_n) după ciocnirea sa cu (S_{n-1}).

Caz particular. Presupunem că sferele sînt perfect elastice, au masele egale şi lungimile firelor extreme sînt egale. Deoarece $e_i = 1$, $i=\overline{1,(n-1)}$, avem

$$(5) \qquad v_i' = 0 \ , \ i=\overline{1,(n-1)} \ , \ v_i=v_1 \ , \ i=\overline{1,n} \ ,$$

prin urmare, sfera (S_i) loveşte sfera (S_{i+1}), $i=\overline{1,(n-1)}$, îi transmite acesteia viteza sa v_1 şi apoi se opreşte. Astfel, sfera (S_n) după ciocnirea cu (S_{n-1}) este lansată cu viteza v_1, se ridică la înălţimea $\ell(1-\cos\alpha)$ unde viteza sa se anulează şi fenomenul se reproduce în sens invers, sferele extreme ridicîndu-se alternativ la aceeaşi înălţime, în timp ce sferele celelalte rămîn fixe. Acest sistem mecanic este cunoscut în fizică sub numele de aparatul de ciocnire al lui Mariotte.

Observaţii. 1°. Dacă nu toate sferele sînt perfect elastice, atunci fenomenul este mult mai complicat, fiindcă, în acelaşi timp cu ciocnirile succesive studiate, se produc alte ciocniri între sfere ca urmare a vitezelor v_i' pe care le-au dobîndit acestea. De asemenea, lucrurilor se complică şi în cazul cînd unele sfere sînt în contact înainte de ciocnire.

2°. Formula (3) este valabilă numai pentru $e_i \neq 0$, $i=\overline{1,(n-2)}$.

3°. In cazul cînd o parte dintre coeficienţii de restituire sînt nuli, iar ceilalţi sînt diferiţi de zero, problema este complicată şi nu o examinăm aici.

4°. Un caz interesant se prezintă atunci cînd toţi coeficienţii de restituire sînt nuli (deci sferele sînt moi) şi masele sferelor sînt egale între ele, $m_i = m$, $i=\overline{1,n}$. Deoarece $e_i = 0$, $i=\overline{1,(n-1)}$, relaţia $(1)_2$ devine

$$v_i' = v_{i+1} , \quad i = \overline{1,(n-1)} ,$$

deci, după ciocnire sferele respective rămîn în contact. Astfel, la prima sa ciocnire sfera (S_{i+1}) vine în contact cu un corp a cărui masă este egală cu masa totală a sferelor precedente şi, în locul lui $(1)_1$, avem

$$imv_i' + mv_{i+1} = imv_i , \quad i=\overline{1,(n-1)},$$

de unde

$$(i+1)v_{i+1} = iv_i , \quad i = \overline{1,(n-1)}$$

şi, în definitiv,

$$v_i = \frac{v_1}{i} , \quad i = \overline{1,n} . \tag{6}$$

338. Un camion de masă M porneşte din repaus şi se mişcă, fără frecare, pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat. Un corp de masă m se mişcă, fără frecare, în caroseria camionului de-a lungul liniei de cea mai mare pantă, între punctul cel mai de sus A şi punctul cel mai de jos B. Presupunînd că în momentul iniţial corpul porneşte din A spre B cu viteza v_0, să se studieze ciocnirile succesive care se produc.

Rezolvare. Fiind vorba despre mişcări de translaţie rectilinie, putem reprezenta corpurile date prin centrele lor de masă. Notăm cu a distanţa $\overline{AB}$, cu α unghiul dintre dreapta pe care se mişcă sistemul dat şi orizontală, iar cu e coeficientul de restituire dintre camion şi corp.

Facem mai întîi observaţia că, între două ciocniri consecutive, viteza relativă a corpului în raport cu camionul rămîne constantă. In adevăr, în cazul de faţă ecuaţia mişcării relative a unui punct (10.7) se reduce la

$$m\bar{a}_r = \bar{L} ,$$

deoarece $\bar{F} = m\bar{g}$, $\bar{\omega} = 0$, $\bar{F}_t = \bar{F}_o = -m\bar{a}_o = -m\bar{g}$ şi $\bar{F}_c = 0$. Forţa de legătură $\bar{L}$ fiind normală la traiectorie, deducem că acceleraţia relativă tangenţială este nulă, deci mişcarea relativă este uniformă.

Astfel, la sfîrşitul primului interval de timp de mărime $t_1 = a/v_o$, se produce o ciocnire în B . Viteza relativă a corpului este v_o înainte de ciocnire şi $-ev_o$ după ciocnire (v. formula (17.7)) .

A doua ciocnire se produce în A la sfîrşitul unui nou interval de timp de mărime $t_2 = a/(ev_o)$ şi tot aşa mai departe. Rezultă că viteza relativă a corpului după a n-a ciocnire este egală cu $(-e)^n v_o$, iar intervalul de timp dintre ciocnirea a (n-1)-a şi ciocnirea a n-a are mărimea $t_n = a/(e^{n-1}v_o)$.

Fie v_n şi u_n vitezele absolute ale corpului şi camionului înaintea ciocnirii a n-a , iar v_n' şi u_n' vitezele corespunzătoare după aceeaşi ciocnire. Relaţii (17.4) şi (17.7) dau

(1) $\quad mv_n' + Mu_n' = mv_n + Mu_n$, $v_n' - u_n' = (-e)^n v_o$.

Pe de altă parte, notînd cu v şi u vitezele absolute ale celor două corpuri la momentul t, din teorema impulsului (13.8), prin integrare, deducem că variaţia impulsului total în intervalul de timp $[0,t]$ este

(2) $\quad mv + Mu - mv_o = (m + M)gt \sin\alpha$.

In particular, pentru $t = \sum_{i=1}^{n} t_i$ egalitatea (2) devine

(3) $$mv_n + Mu_n = mv_0 + (m + M)g(\sum_1^n t_i)\sin\alpha \quad ,$$

unde $$\sum_1^n t_i = \frac{a}{v_0}(1+e^{-1}+ e^{-2}+\ldots+ e^{-n+1}) = \frac{a(1-e^n)}{v_0(1-e)}\, e^{1-n} \quad .$$

Din ecuaţiile (1) şi (3) obţinem

(4) $$v_n' = \frac{m+(-e)^n M}{m + M} v_0 + g(\sum_1^n t_i)\sin\alpha \, , \quad u_n' = \frac{1-(-e)^n}{m+M} mv_0 + g(\sum_1^n t_i)\sin\alpha \, .$$

Prin urmare, vitezele v_n' şi u_n' cresc necontenit, iar pentru $e \neq 1$ diferenţa lor tinde la zero.

339. Un punct material greu, fără viteză iniţială, cade în vid de la înălţimea h pe un plan orizontal şi în urma ciocnirii se ridică la înălţimea h_1 . Să se afle înălţimea la care se ridică mobilul după a n-a ciocnire.

Rezolvare. Această problemă este asemănătoare cu punctul 3^0 de la problema 159. Există însă două deosebiri între aceste probleme. In primul rînd, în cazul de faţă se neglijează rezistenţa aerului, fapt ce simplifică substanţial calculele . In al doilea rînd, ipoteza problemei 159, care afirmă că după ciocnirea cu planul orizontal mobilul se întoarce cu viteza sa de incidenţă, este echivalentă cu faptul că ciocnirea este perfect elastică (deci e=1), iar în cazul de faţă coeficientul de restituire e nu este cunoscut, în schimb se dă înălţimea h_1 la care se ridică mobilul după prima ciocnire.

In continuare vom utiliza notaţiile şi unele rezultate de la problema citată mai sus. Mai întîi, trebuie să determinăm coeficientul de restituire e dintre mobil şi planul orizontal dat. In acest scop, facem observaţia că atît la coborîre, cît şi la urcare, ecuaţia diferenţială a mişcării mobilului este

(1) $$\ddot{x} = -g \, .$$

Pentru coborîre avem condiţiile iniţiale (4) de la problema 159.

Rezultă că la sfîrşitul primului interval de timp de mărime $t_1 = \sqrt{2h/g}$, se produce prima ciocnire dintre punctul material şi planul orizontal dat. Viteza punctului este $-\sqrt{2gh}$ înainte de ciocnire şi $e\sqrt{2gh}$ după ciocnire.

Astfel, pentru mişcarea ascendentă avem condiţiile iniţiale

(2) $$t = 0 , \quad x = 0 , \quad \dot{x} = e\sqrt{2gh} ,$$

care conduc la legea mişcării

(3) $$x = -\frac{1}{2} gt^2 + et\sqrt{2gh} .$$

Din (3) deducem că mobilul se ridică la înălţimea h_1 (unde viteza sa se anulează) după un interval de timp, de la ciocnire, de mărime et_1 şi avem

(4) $$h_1 = e^2 h , \text{ sau } e = \sqrt{h_1/h} .$$

Înălţimea la care se ridică mobilul după a doua ciocnire este

$$h_2 = e^2 h_1 = e^4 h = \frac{h_1^2}{h} ,$$

iar pentru înălţimea h_n la care se ridică mobilul după a n-a ciocnire găsim formula de recurenţă

$$h_n = e^2 h_{n-1} = \frac{h_1}{h} h_{n-1} ,$$

din care obţinem

(5) $$h_n = e^{2n} h = \left(\frac{h_1}{h}\right)^n h = h^{1-n} h_1^n .$$

Prin urmare, înălţimea la care se ridică mobilul după ciocnirile succesive cu planul dat tinde la zero pentru $n \to \infty$.

Observaţie. In cazul cînd rezistenţa aerului are mărimea $\frac{mgv^2}{k^2}$, ecuaţia (22) de la problema 159 se înlocuieşte cu egalitatea

(6) $$h_1 = \frac{k^2}{2g} \ln\left(1 + e^2 \frac{v_1^2}{k^2}\right) .$$

Prin eliminarea lui v_1 din (6) şi din ecuaţia (11) de la problema citată, se obţine valoarea coeficientului de restituire

$$(7) \qquad e = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}\frac{gh_1}{k^2}}{\operatorname{sh}\frac{gh}{k^2}}}\exp\left[\frac{g}{2k^2}(h+h_1)\right],$$

unde pentru a evita confundarea coeficientului de restituire cu baza logaritmilor naturali (notaţi cu aceeaşi literă), am însemnat funcţia inversă logaritmului natural prin $\exp(.)$.

Procedînd în acelaşi mod ca la punctul 3^0 al problemei 159, deducem formula de recurenţă

$$(8) \qquad \frac{e^2}{\exp\left(\frac{2gh_n}{k^2}\right)-1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{2gh_{n-1}}{k^2}\right)-1} + 1, \quad n\in\mathbb{N},$$

de unde rezultă că h_n verifică relaţia

$$\frac{e^{2n}}{\exp\left(\frac{2gh_n}{k^2}\right)-1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{2gh}{k^2}\right)-1} + \frac{e^{2n}-1}{e^2-1}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

340. Se consideră un tub metalic circular drept umplut cu pămînt, care este fixat cu ajutorul barelor OA şi OB astfel încît să poată oscila în jurul axei orizontale Ox_3 (v.fig.44). Configuraţia este simetrică faţă de planul vertival x_1Ox_2, care trece prin centrul de masă P^* şi, în poziţia de repaus, P^* se află pe axa verticală descendentă Ox_1.

La momentul t_0 tubul este în echilibru, iar dintr-o armă de foc este lansat orizontal, în planul x_1Ox_2, cu viteza v_0, un proiectil care pătrunde în pămîntul din tub şi se opreşte în punctul P_0. Ştiind că după ciocnire tubul începe să oscileze şi că se poate măsura direct amplitudinea maximă a oscilaţiei sale, să se afle viteza v_0 a proiectilului.

Rezolvare. Acest aparat pentru măsurarea vitezei inițiale a proiectilelor se numește pendul balistic. In fond este vorba despre un pendul fizic.

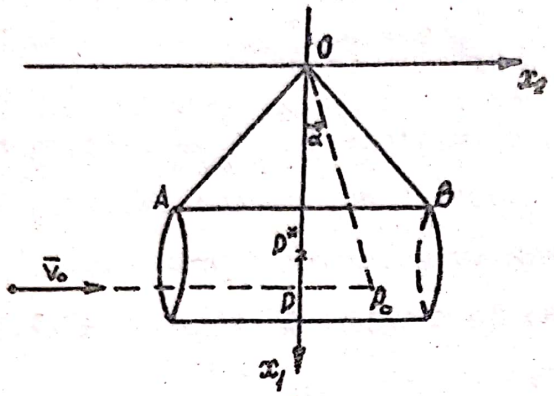

Fig.44

Fie m masa proiectilului, M masa pendulului (fără proiectil), I_{33} momentul de inerție al pendulului față de axa Ox_3, a distanța centrului de masă al pendulului la axa de suspensie ($a=\overline{OP^*}$), ℓ distanța dintre axa de suspensie și axa gurii de foc ($\ell = \overline{OP}$), α unghiul constant $\widehat{P_oOP^*}$ și θ_1 amplitudinea maximă a oscilației sistemului. Toate aceste cantități le presupunem cunoscute.

Pentru a determina viteza inițială v_o a proiectilului, trebuie să aflăm mai întîi viteza unghiulară ω_1 a sistemului format din pendul și proiectil după ciocnire.

Notînd cu θ unghiul de oscilație (unghiul dintre OP^* și verticala descendentă în timpul mișcării pendulului), atunci valoarea maximă a lui θ este θ_1, iar $\dot{\theta}^- = 0$ și $\dot{\theta}^+ = \omega_1$.

Singurele forțe percutante externe care apar în timpul ciocnirii sînt reacțiunile $\bar{L}$ și $\bar{L}'$ ale axei Ox_3, aplicate în punctele fixe O și O' de pe această axă.

Deoarece momentul rezultant al forțelor percutante de legătură $\bar{L}$ și $\bar{L}'$ față de axa Ox_3 este nul, din relația (17.5), aplicată sistemului format din pendul și proiectil, deducem

(1)$_{\text{Cum}}$ $$\Delta K_3 = 0 .$$

(2) $$K_3^- = m\ell v_o , \quad K_3^+ = (I_{33} + m\ell_o^2)\omega_1 ,$$

în care $\ell_o = \overline{OP}_o = \dfrac{\ell}{\cos\alpha}$

ecuaţia (1) revine la

(3) $$v_o = \frac{I_{33} + m\ell_o^2}{m\ell}\omega_1 .$$

Să căutăm acum o relaţie între ω_1 şi amplitudinea maximă θ_1. Ea poate fi dedusă din integrala primă a energiei, sau din teorema momentului cinetic faţă de axa Oz_3 după ciocnire, pentru sistemul format din pendul şi proiectil.

Dacă trecem de la poziţia verticală a lui OP^* la amplitudinea maximă, atunci energia cinetică totală este mai întîi $\frac{1}{2}(I_{33} + m\ell_o^2)\omega_1^2$ şi apoi zero (deoarece pentru $\theta = \theta_1$, avem $\dot\theta = 0$). Pe de altă parte, lucrul mecanic elementar al forţelor interne este nul, iar cel al forţelor externe este

$$d\mathcal{L}_{ext} = d(M\bar g\overline{r^*} + m\bar g\overline{OP}_o) ,$$

prin urmare

$$W = g\left[Ma\cos\theta + m\ell_o\cos(\theta+\alpha)\right] .$$

Dacă scriem relaţia (13.15) pentru $\theta = 0$ şi $\theta = \theta_1$ şi apoi scădem membru cu membru, obţinem

(4) $$(I_{33}+m\ell_o^2)\omega_1^2 = 2Mag(1-\cos\theta_1) + 2m\ell_o g\left[\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta_1)\right] .$$

Ecuaţiile (3) şi (4) rezolvă problema. In particular, dacă $\alpha = 0$, deci dacă proiectilul se opreşte în punctul P conţinut în planul care trece prin axa de suspensie şi centrul de masă al pendulului, atunci găsim

(5) $$v_o = \frac{2}{m\ell}\sqrt{g(Ma + m\ell)(I_{33} + m\ell^2)}\,\sin\frac{\theta_1}{2} .$$

Ne punem acum problema de a vedea în ce caz axa de suspensie nu suportă nici o forţă percutantă. Evident, această situaţie este cea mai favorabilă conservării aparatului.

In acest caz, din (17.4) deducem $\Delta\bar I = 0$, adică

$$Ma\,\omega_1\bar{e}_2+m\,\omega_1(\bar{e}_3\times\vec{OP}_0)-mv_0\bar{e}_2=0,\ \vec{OP}_0=\ell_0(\bar{e}_1\sin\alpha+\bar{e}_2\cos\alpha)\ .$$

Rezultă $\alpha=0$ și $I_{33}=Ma\ell$, prin urmare, avem

$$v_0=\frac{2(Ma+m\ell)}{m}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\sin\frac{\theta_1}{2}\ . \tag{6}$$

Observație. In cazul cînd proiectilul nu se oprește într-un punct P_0 din interiorul cilindrului, procedăm la fel ca mai înainte. Lucrurile se simplifică de data aceasta, deoarece după ciocnire nu mai luăm în considerație proiectilul. Astfel, relațiile (2)-(4) devin respectiv

$$K_3^-=m\ell v_0\ ,\quad K_3^+=I_{33}\omega_1\ , \tag{2'}$$

$$v_0=\frac{I_{33}}{m\ell}\,\omega_1\ , \tag{3'}$$

$$I_{33}\omega_1^2=4Mag\sin^2\frac{\theta_1}{2}\ . \tag{4'}$$

Formal, ecuațiile (2')-(4') se găsesc din (2)-(4) pentru $\ell_0=0$.

Din (3') și (4') obținem

$$v_0=\frac{2}{m\ell}\sqrt{MagI_{33}}\sin\frac{\theta_1}{2}\ . \tag{7}$$

PARTEA A PATRA

M E C A N I C Ă A N A L I T I C Ă

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XVIII

ECUAŢIILE LUI LAGRANGE

Mecanica sistemelor cu un număr finit de grade de libertate poate fi abordată prin două metode. Prima metodă este elementară şi se bazează pe aplicarea principiilor lui Newton. A doua metodă, numită metoda lucrului mecanic virtual, este mai suplă şi mai sintetică. Punctul de plecare al acestei metode îl constituie un principiu general - echivalent cu legile lui Newton şi anume

Principiul lui D'Alembert. Mişcarea unui sistem mecanic se face astfel încît în orice moment forţele active şi forţele de inerţie îşi fac echilibru, în virtutea legăturilor.

Principiile lucrului mecanic virtual şi al lui D'Alembert conduc la

Teorema fundamentală a dinamicii. In orice moment al mişcării unui sistem mecanic supus la legături fără frecare, lucrul mecanic elementar al forţelor active şi al forţelor de inerţie, pentru orice deplasare virtuală compatibilă cu legăturile la acel moment, este nepozitiv, adică

$$\int_D (\delta \bar{r})(\bar{F} - \bar{a})dm \leq 0 \,, \tag{18.1}$$

semnul egal corespunzînd legăturilor bilaterale.

Relaţia (18.1) se numeşte relaţia fundamentală a dinamicii.

In locul principiului lui D'Alembert se poate lua un alt

principiu general (diferențial sau integral). Mecanica teoretică construită pe cale analitică, pornind de la unele principii generale, se numește mecanică analitică sau mecanică lagrangiană.

Fie q^i, $i=\overline{1,n}$, coordonatele generalizate ale sistemului material considerat (v.cap.V). Vectorul de poziție al unui punct generic al sistemului este o funcție determinată de coordonatele generalizate și de timp

$$\bar{r} = \bar{r}(q^1,q^2,\dots,q^n,t) = \bar{r}(q,t) . \tag{18.2}$$

Dacă sistemul este scleronom, atunci $\bar{r}$ nu depinde în mod explicit de t.

Energia cinetică totală a sistemului se poate scrie sub forma

$$E = E_2 + E_1 + E_o , \tag{18.3}$$

unde

$$E_2 = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j , \quad E_1 = b_i\dot{q}^i , \quad E_o = \frac{1}{2}c , \tag{18.4}$$

iar

$$a_{ij}=a_{ji}=\int_D \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^j}dm, \quad b_i=\int_D \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}dm , \tag{18.5}$$

$$c = \int_D \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right)^2 dm , \quad \det \|a_{ij}\| \neq 0 .$$

Lucrul mecanic elementar al forțelor date pentru o deplasare virtuală oarecare are expresia

$$\delta\mathcal{L} = \int_D (\delta\bar{r})\bar{F}\,dm = Q_i\delta q^i , \tag{18.6}$$

unde Q_i, numite componentele generalizate ale forțelor date, sînt definite prin

$$Q_i = \int_D \bar{F}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}dm , \quad i=\overline{1,n} . \tag{18.7}$$

In continuare vom prezenta separat cazul unui sistem mecanic olonom și cazul unui sistem mecanic neolonom.

I. Considerăm un sistem mecanic olonom cu n grade de libertate. In acest caz relaţia (18.1) este echivalentă cu ecuaţiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q^i} = Q_i \ , \quad i=\overline{1,n} \ . \tag{18.8}$$

Ecuaţiile lui Lagrange (18.8) reprezintă un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea cu funcţiile necunoscute $q^i(t)$, $i=\overline{1,n}$.

Pentru determinarea mişcării sistemului material, la ecuaţiile (18.8) trebuie să adăugăm condiţiile iniţiale

$$q^i(t_o) = q_o^i \ , \quad \dot{q}^i(t_o) = \dot{q}_o^i \ , \quad i=\overline{1,n} \ , \tag{18.9}$$

care fixează poziţia sistemului şi starea vitezelor la momentul t_o .

Un sistem material poate fi reprezentat printr-un punct P în spaţiul cu n dimensiuni al variabilelor q^i, numit spaţiul configuraţiilor. Atunci cînd t variază, punctul P descrie o curbă de ecuaţii $q^i = q^i(t)$, $i=\overline{1,n}$, în acel spaţiu.

Un caz particular important este cazul în care există o funcţie de forţe $U(q^1,q^2,\ldots,q^n,t)$. Atunci avem

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q^i} \ , \quad i=\overline{1,n} \ , \tag{18.10}$$

iar ecuaţiile lui Lagrange se scriu sub forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \ , \quad i=\overline{1,n} \ , \tag{18.11}$$

în care funcţia L, numită funcţia lui Lagrange sau potenţial cinetic, are expresia

$$L(q,\dot{q},t) = E(q,\dot{q},t) + U(q,t) \ . \tag{18.12}$$

Ecuaţiile (18.11) nu se modifică dacă înlocuim funcţia L prin $L + \frac{dG}{dt}$, oricare ar fi funcţia $G(q,t)$.

Integrarea sistemului (18.8) sau a sistemului (18.11),

implică găsirea de integrale prime. In legătură cu aceasta menționăm două cazuri remarcabile.

A. Dacă o coordonată generalizată, de exemplu q^i, nu figurează în mod explicit în expresia energiei cinetice a sistemului și componenta generalizată Q_i a forțelor date este nulă, atunci avem integrala primă a sistemului (18.8), liniară în $\dot{q}^i$

(18.13) $$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}^i} = C_i \ , \quad C_i = \text{const.}$$

Putem avea mai multe integrale prime de tipul (18.13), dacă există mai multe valori ale indicelui i pentru care sînt verificate condițiile puse.

In cazul în care ecuația lui Lagrange relativă la coordonata q^i admite integrala primă (18.13) și q^i nu apare în mod explicit în celelalte ecuații (18.8), atunci q^i se numește coordonată ciclică (ignorabilă, secundară, neesențială, ascunsă).

B. In ipoteza că există o funcție $U_1(q,t)$ astfel ca să avem

(18.14) $$Q_i \dot{q}^i - \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{dU_1}{dt} \ ,$$

are loc integrala primă a lui Painlevé

(18.15) $$E_2 - E_o = U_1 + \text{const.}$$

Integrala lui Painlevé este pătratică în raport cu $\dot{q}^i$ și nu conține în mod explicit timpul (deoarece E_2 și $E_o + U_1$ trebuie să nu depindă explicit de t).

Cazuri particulare. i) Dacă există o funcție de forțe $U(q,t)$ și o funcție $U_2(q,t)$ astfel încît

(18.16) $$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dU_2}{dt} \ ,$$

atunci $U_1 = U - U_2$, iar integrala lui Painlevé are forma

(18.17) $$E_2 - E_o = U - U_2 + \text{const.}$$

ii) In cazul cînd funcţia lui Lagrange nu depinde explicit de timp, avem $U_2 = 0$ şi egalitatea (18.17) se reduce la integrala primă a lui Jacobi

(18.18) $$E_2 - E_0 = U + \text{const.}$$

iii) In ipoteza că sistemul mecanic este sclerocom şi că există o funcţie de forţe $U(q)$ care nu depinde explicit de t, sistemul se numeşte conservativ, iar integrala primă a lui Jacobi devine integrala energiei

(18.19) $$E = U + h \ , \quad E = E_2 \ , \quad h = \text{const.}$$

II. Presupunem că sistemul mecanic dat este neolonom şi numărul coordonatelor generalizate este minim, deci $n=k+\ell$, k fiind numărul gradelor de libertate. Avem ℓ ecuaţii de legătură

(18.20) $$A_{\alpha i}\dot{q}^i + B_\alpha = 0 \ , \quad i = \overline{1,n}, \ \alpha = \overline{1,\ell} \ ,$$

în care $A_{\alpha i}$ şi B_α sînt funcţii date de q^j şi t.

Din (18.1) şi (18.20) se deduc ecuaţiile lui Lagrange pentru acest caz

(18.21) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q^i} = Q_i + \lambda_\alpha A_{\alpha i} \ , \ i=\overline{1,n}, \ \alpha=\overline{1,\ell},$$

unde funcţiile necunoscute $\lambda_\alpha(t)$ se numesc multiplicatorii lui Lagrange.

Este important de reţinut faptul că ecuaţiile (18.21) trebuiesc formate cu energia cinetică a sistemului obţinută în ipoteza că q^i sînt independente. Nu trebuie modificată expresia lui E ţinînd seama de legăturile neolonome ale sistemului.

Funcţiile necunoscute $q^i(t)$, $i=\overline{1,n}$ şi $\lambda_\alpha(t)$, $\alpha=\overline{1,\ell}$, se determină din ecuaţiile (18.20) şi (18.21), la care se adaugă condiţiile iniţiale. De data aceasta membrii secunzi

din (18.9) nu mai pot fi dați în mod arbitrar, deoarece egalitățile (18.20) trebuie să fie verificată și la momentul inițial.

Ecuațiile lui Lagrange (18.8) și (18.21) sînt echivalente cu relațiile

(18.22) $$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^i} = Q_i \ , \quad i = \overline{1,n} \ ,$$

respectiv

(18.23) $$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^i} = Q_i + \lambda_\alpha A_{\alpha i} \ , \ i = \overline{1,n}, \ \alpha = \overline{1,\ell},$$

funcția $S(q,\dot{q},\ddot{q},t)$, numită energia de accelerație sau funcția lui Appell, fiind definită prin formula

(18.24) $$S = \frac{1}{2}\int_D \ddot{r}^2 dm \ .$$

Relațiile (18.22) și (18.23) se numesc ecuațiile lui Appell sau, încă, ecuațiile lui Gibbs-Appell .

Formal, ecuațiile (18.22) și (18.23) sînt mai simple decît ecuațiile (18.8) și (18.21), însă, în general, calculul lui S este mult mai complicat decît al lui E . In cazul unui sistem mecanic supus la legături, ecuațiile lui Appell ne permit să evităm introducerea multiplicatorilor. Astfel, ecuațiile (18.20) ne permit în general să exprimăm ℓ cantități $\dot{q}^i$, pe care le putem lua întotdeauna $\dot{q}^{n-\ell+1},\dots,\dot{q}^n$, în funcție de celelalte $n-\ell$. De asemenea, exprimăm pe δq^i, $i=\overline{n-\ell+1,n}$, în funcție de δq^i, $i=\overline{1,n-\ell}$. Prin eliminarea cantităților $\dot{q}^i$, $\ddot{q}^i$, $n-\ell+1 \leq i \leq n$, energia de accelerație devine $S(t,q^1,\dots,q^n,\dot{q}^1,\dots,\dot{q}^{n-\ell},\ddot{q}^1,\dots,\ddot{q}^{n-\ell})$, iar lucrul mecanic al forțelor date se scrie $\delta\mathcal{L} = Q_i' \delta q^i$, $1 \leq i \leq n-\ell$ și se obțin ecuațiile lui Appell

(18.25) $$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^i} = Q_i' \ , \quad i = \overline{1,n-\ell} \ .$$

341. Pe laturile unghiului AOB , situat într-un plan vertical, se mişcă, fără frecare, punctele materiale grele P_i , $i=\overline{1,4}$, legate între ele printr-un fir flexibil, inextensibil şi fără masă, care trece peste un scripete O de dimensiuni neglijabile (fig.45). Să se afle mişcarea sistemului.

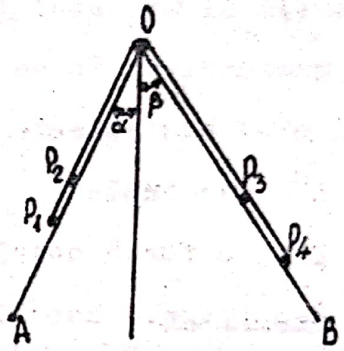

Fig.45

Rezolvare. Fie α şi β unghiurile dreptelor OA şi OB cu verticala, $\bar{u}_1$ şi $\bar{u}_2$ versorii axelor OA şi OB, m_i, $i=\overline{1,4}$, masele punctelor date şi $a = \overline{P_1P_2}$, $b = \overline{P_2O} + \overline{OP_3}$, $c = \overline{P_3P_4}$. Sistemul are un grad de libertate şi poziţia sa poate fi determinată cu ajutorul parametrului $x = \overline{OP_1}$.

Vectorii de poziţie ai celor patru puncte sînt

(1) $\bar{r}_1 = x\bar{u}_1$, $\bar{r}_2 = (x-a)\bar{u}_1$, $\bar{r}_3 = (a+b-x)\bar{u}_2$, $\bar{r}_4 = (a+b+c-x)\bar{u}_2$.

Ecuaţia diferenţială a mişcării poate fi dedusă direct din teorema fundamentală a dinamicii (18.1), care în cazul de faţă se reduce la

(2) $$m_i(\bar{g} - \ddot{\bar{r}}_i)\,\delta\bar{r}_i = 0 \quad , \quad i = \overline{1,4} \ .$$

Deoarece $\bar{g}\bar{u}_1 = g\cos\alpha$, $\bar{g}\bar{u}_2 = g\cos\beta$ şi a,b,c sînt constante în timpul mişcării, din (1) şi (2) obţinem ecuaţia diferenţială

(3) $$\ddot{x} = \frac{(m_1+m_2)\cos\alpha - (m_3+m_4)\cos\beta}{m_1+m_2+m_3+m_4}\,g \ ,$$

prin urmare, $\ddot{x}$ este constant.

Rezultă că pentru $(m_1+m_2)\cos\alpha \neq (m_3+m_4)\cos\beta$ mişcarea sistemului este uniform accelerată, iar dacă $(m_1+m_2)\cos\alpha = (m_3+m_4)\cos\beta$ sistemul se mişcă uniform sau este în echilibru, după cum viteza iniţială este diferită de zero sau

este egală cu zero. Cînd unul dintre puncte trece prin O, ecuaţia mişcării trebuie să fie modificată în mod corespunzător.

342. Un rigid se roteşte în jurul axei Ox_3 cu o viteză unghiulară variabilă ω. Să se afle rezultanta forţelor de inerţie şi momentul rezultant al lor în raport cu punctul O, la momentul t. In ce condiţii forţele de inerţie ale rigidului sînt echivalente cu :

1° un cuplu

2° o forţă unică.

Rezolvare. Rezultanta forţelor de inerţie ale unui rigid cu un ax fix şi momentul rezultant al lor în raport cu punctul O au expresiile

$$(1)\qquad \bar{\mathcal{R}}_1 = -\int_D \bar{a}\,dm\ ,\quad \bar{\mathcal{M}}_1 = -\int_D (\bar{r}\times\bar{a})\,dm\ ,$$

unde vectorul acceleraţiei are componentele (2.13).

Deducem

$$(2)\qquad \bar{\mathcal{R}}_1 = M(\omega^2 x_1^* + \dot{\omega} x_2^*)\bar{e}_1 + M(\omega^2 x_2^* - \dot{\omega} x_1^*)\bar{e}_2$$

şi

$$(3)\qquad \bar{\mathcal{M}}_1 = (\omega^2 I_{23} - \dot{\omega} I_{13})\bar{e}_1 - (\omega^2 I_{13} + \dot{\omega} I_{23})\bar{e}_2 - \dot{\omega} I_{33}\bar{e}_3,$$

iar mărimile celor doi vectori sînt date de

$$(4)\qquad \mathcal{R}_1 = M\left[(\omega^4 + \dot{\omega}^2)(x_1^{*2} + x_2^{*2})\right]^{1/2}$$

şi

$$(5)\qquad \mathcal{M}_1 = \left[(\omega^4 + \dot{\omega}^2)(I_{13}^2 + I_{23}^2) + \dot{\omega}^2 I_{33}^2\right]^{1/2}.$$

1°. Forţele de inerţie care acţionează asupra rigidului se reduc la un cuplu dacă şi numai dacă rezultanta lor este nulă (v.cazul B, cap.XII). Rezultă

$$x_1^* = x_2^* = 0\ ,$$

deci, centrul de masă al rigidului trebuie să se afle pe axa de rotaţie.

2°. Presupunem că rezultanta este diferită de zero, prin urmare, avem

$$x_1^{*2} + x_2^{*2} \neq 0 , \tag{6}$$

adică centrul de masă nu trebuie să se afle pe axa de rotaţie.

Forţele de inerţie ale rigidului se reduc la o forţă unică aplicată într-un punct al axei centrale, atunci şi numai atunci cînd $\bar{R}_1 \overline{m_1} = 0$ (v. formula (12.10) şi cazul C, cap. XII). Astfel obţinem

$$(\omega^4 + \dot{\omega}^2)(x_1^* I_{23} - x_2^* I_{13}) = 0 ,$$

sau

$$x_1^* I_{23} - x_2^* I_{13} = 0 . \tag{7}$$

Discuţia ecuaţiei (7), cu condiţia (6), nu este complicată. Dacă $x_1^* x_2^* \neq 0$, atunci axa de rotaţie Ox_3 este axă principală pentru un punct oarecare al său.

343. Să se deducă cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange ecuaţia de mişcare a unui rigid cu o axă fixă.

Rezolvare. Luăm axa de rotaţie a rigidului ca axă Ox_3 şi notăm cu θ unghiul de rotaţie al corpului în raport cu planul x_1Ox_3. Parametrul θ îl considerăm drept coordonată generalizată. În acest caz avem o singură ecuaţie a lui Lagrange.

Energia cinetică a rigidului se poate calcula cu ajutorul formulei (14.7). Dacă ţinem seama de relaţiile (2.10), obţinem

$$E = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\theta}^2 , \tag{1}$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = I_{33}\dot{\theta} , \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 . \tag{2}$$

Pe de altă parte, deplasările virtuale compatibile cu legăturile ale punctelor rigidului sînt de forma

$$\delta \bar{r} = (\bar{e}_3 \delta\theta) \times \bar{r} ,$$

prin urmare, lucrul mecanic elementar al forţelor date, pentru

o deplasare virtuală oarecare compatibilă cu legăturile, are expresia

$$(3)\qquad \delta\mathcal{L} = \int_D (\delta\bar{r})\bar{F}dm = \delta\theta \int_D (\bar{r},\bar{F},\bar{e}_3)dm = \mathcal{M}_3\delta\theta \ .$$

Relaţia (3) ne arată că $\mathcal{M}_3$ reprezintă componenta generalizată a forţelor date. Astfel, ecuaţia lui Lagrange relativă la parametrul θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial\theta} = \mathcal{M}_3 \ ,$$

conduce la

$$I_{33}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_3 \ ,$$

deci, am regăsit ecuaţia (14.16), dedusă din teoremele generale.

344. Să se deducă cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange ecuaţiile lui Euler pentru mişcarea unui rigid cu un punct fix.

Rezolvare. Considerăm drept coordonate generalizate independente unghiurile lui Euler ψ, φ şi θ. Reperul solidar cu rigidul fiind format din axe principale de inerţie, relaţia (14.7) devine

$$(1)\qquad 2E = I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2 \ ,$$

unde $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ se exprimă în funcţie de ψ, φ şi θ prin formulele (2.21).

Pentru a calcula derivatele lui E în raport cu $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \psi, \varphi$ şi θ, facem observaţia că din (2.21) rezultă

$$(2)\qquad \frac{\partial\omega_i}{\partial\dot{\psi}} = \varepsilon_{3i} \ , \quad \frac{\partial\omega_i}{\partial\psi} = 0 \ , \quad i = \overline{1,3} \ ,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial\omega_i}{\partial\dot{\varphi}} = \delta_{i3} \ , \quad \frac{\partial\omega_i}{\partial\varphi} = \varepsilon_{ij3}\omega_j \ , \quad i,j=\overline{1,3}$$

şi

$$(4)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\dot{\theta}}, \frac{\partial\omega_2}{\partial\dot{\theta}}, \frac{\partial\omega_3}{\partial\dot{\theta}}\right) = (\cos\varphi, -\sin\varphi, 0) \ , \\ \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\theta}, \frac{\partial\omega_2}{\partial\theta}, \frac{\partial\omega_3}{\partial\theta}\right) = (\dot{\psi}\sin\varphi\cos\theta, \dot{\psi}\cos\varphi\cos\theta, -\dot{\psi}\sin\theta), \end{cases}$$

în care ε_{3i} este componenta pe axa Ox_i a versorului $\bar{\varepsilon}_3$ al axei fixe $O\xi_3$ (v.expresiile (2.19)), δ_{i3} este tensorul lui Kronecker, iar ε_{ij3} este tensorul lui Ricci (v.formulele (2.4)).

Dacă derivăm pe E în raport cu unghiurile lui Euler și derivatele lor în raport cu t, prin intermediul lui ω_i, din egalitățile (1)-(4) obținem

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial \dot{\psi}} = I_{ii}\omega_i\,\varepsilon_{3i} = (I_{11}\omega_1\sin\varphi + I_{22}\omega_2\cos\varphi)\sin\theta + \\ \qquad + I_{33}\omega_3\cos\theta\,, \dfrac{\partial E}{\partial \psi} = 0\,, \\ \dfrac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = I_{33}\omega_3, \dfrac{\partial E}{\partial \varphi} = \varepsilon_{ij3}I_{ii}\omega_i\omega_j = (I_{11}-I_{22})\omega_1\omega_2\,, \\ \dfrac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = I_{11}\omega_1\cos\varphi - I_{22}\omega_2\sin\varphi\,, \dfrac{\partial E}{\partial \theta} = \\ \quad = \dot{\psi}\left[(I_{11}\omega_1\sin\varphi + I_{22}\omega_2\cos\varphi)\cos\theta - I_{33}\omega_3\sin\theta\right]. \end{cases}$$

Deplasările virtuale ale punctelor rigidului, care lasă punctul O fix, sînt de forma

$$\delta\bar{r} = \left[(\delta\psi\,\sin\theta\sin\varphi + \delta\theta\,\cos\varphi)\bar{e}_1 + (\delta\psi\sin\theta\cos\varphi - \delta\theta\sin\varphi)\bar{e}_2 + \right.$$
$$\left. + (\delta\psi\cos\theta + \delta\varphi)\bar{e}_3\right] \times \bar{r}\,,$$

prin urmare, lucrul mecanic elementar al forțelor date, pentru o deplasare virtuală oarecare compatibilă cu legătura, are expresia

$$(6)\quad \delta\mathcal{L} = \int_D (\delta\bar{r})\bar{F}\,dm = \left[(\mathcal{M}_1\sin\varphi + \mathcal{M}_2\cos\varphi)\sin\theta + \mathcal{M}_3\cos\theta\right]\delta\psi +$$
$$+ (\mathcal{M}_1\cos\varphi - \mathcal{M}_2\sin\varphi)\,\delta\theta + \mathcal{M}_3\,\delta\varphi\,.$$

Astfel, componentele generalizate ale forțelor date sînt

$$(7)\quad \begin{cases} \Psi = (\mathcal{M}_1\sin\varphi + \mathcal{M}_2\cos\varphi)\sin\theta + \mathcal{M}_3\cos\theta\,, \\ \Theta = \mathcal{M}_1\cos\varphi - \mathcal{M}_2\sin\varphi\,,\ \Phi = \mathcal{M}_3\,. \end{cases}$$

În cazul de față ecuațiile lui Lagrange (18.8) sînt în număr de trei și, în virtutea relațiile (5),(7) și (2.21), au forma

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left[(I_{11}\omega_1\sin\varphi + I_{22}\omega_2\cos\varphi)\sin\theta + I_{33}\omega_3\cos\theta\right] = \\ \qquad = (\mathcal{M}_1\sin\varphi + \mathcal{M}_2\cos\varphi)\sin\theta + \mathcal{M}_3\cos\theta\ , \\ I_{11}\dot{\omega}_1\cos\varphi - I_{22}\dot{\omega}_2\sin\varphi - (I_{11}\omega_1\sin\varphi + I_{22}\omega_2\cos\varphi - I_{33}\dot{\psi}\sin\theta)\omega_3 = \\ \qquad = \mathcal{M}_1\cos\varphi - \mathcal{M}_2\sin\varphi\ , \\ I_{33}\dot{\omega}_3 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 = \mathcal{M}_3\ . \end{cases}$$

Aşadar, primele două ecuaţii ale lui Lagrange (8) nu coincid cu primele două ecuaţii ale lui Euler (14.13). Putem face, însă, unele combinaţii ale ecuaţiilor (8), astfel încît să găsim chiar ecuaţiile lui Euler. In adevăr, prin eliminarea lui $\mathcal{M}_3$ din ecuaţiile $(8)_1$ şi $(8)_3$, deducem că sistemul (8) este echivalent cu

$$(9)\quad \begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1\sin\varphi + I_{22}\dot{\omega}_2\cos\varphi + (I_{11}\omega_1\cos\varphi - I_{22}\omega_2\sin\varphi - I_{33}\dot{\theta})\omega_3 = \\ \qquad = \mathcal{M}_1\sin\varphi + \mathcal{M}_2\cos\varphi\ , \\ I_{11}\dot{\omega}_1\cos\varphi - I_{22}\dot{\omega}_2\sin\varphi - (I_{11}\omega_1\sin\varphi + I_{22}\omega_2\cos\varphi - I_{33}\dot{\psi}\sin\theta)\omega_3 = \\ \qquad = \mathcal{M}_1\cos\varphi - \mathcal{M}_2\sin\varphi\ , \\ I_{33}\dot{\omega}_3 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 = \mathcal{M}_3\ . \end{cases}$$

Mai departe, dacă eliminăm pe $\mathcal{M}_2$ din ecuaţiile $(9)_1$ şi $(9)_2$ obţinem ecuaţia $(14.13)_1$, iar dacă eliminăm pe $\mathcal{M}_1$ din aceleaşi ecuaţii rezultă ecuaţia $(14.13)_2$.

345. Se consideră un sistem mecanic olonom şi soleronom, cu n grade de libertate, solicitat de un sistem de forţe date care depind numai de poziţia sistemului. Să se găsească n-l legături, fără frecare, ce trebuie impuse sistemului mecanic, aşa încît sistemul cu legături complete astfel obţinut să fie tautocron, adică să ajungă în acelaşi timp într-o anumită poziţie, oricare ar fi poziţia iniţială în care el este abandonat fără viteză (v. şi problema 197).

Rezolvare. Fie q^i , $i=\overline{1,n}$, coordonatele generalizate ale sistemului mecanic înainte de introducerea legăturilor noi. Energia cinetică a sistemului este dată de

$$E = \frac{1}{2} a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j ,$$

iar componentele generalizate Q_i, $i=\overline{1,n}$, ale forţelor date, depind numai de $q^1, q^2, \ldots, q^n$.

Să presupunem acum că am impus sistemului mecanic dat un număr de n-1 legături fără frecare, datorită cărora sistemul devine cu legături complete şi tautocron. Atunci putem exprima pe q^i , $i=\overline{1,n}$, în funcţie de un singur parametru q, iar singura ecuaţie de mişcare a noului sistem este dată de teorema energiei cinetice

(1) $$\dot{E} = Q_i\dot{q}^i .$$

Dacă luăm în locul lui q un nou parametru s definit prin

(2) $$ds = \sqrt{a_{ij}dq^idq^j} ,$$

rezultă

$$E = \frac{1}{2}\dot{s}^2 , \quad Q_i\dot{q}^i = f(s)\dot{s} ,$$

iar ecuaţia (1) devine

(3) $$\ddot{s} = f(s) .$$

Astfel, sistemul mecanic cu legături complete obţinut prin introducerea a n-1 legături necunoscute , poate fi reprezentat printr-un punct P care se mişcă pe axa parametrului s. Prin urmare, problema de care ne ocupăm s-a redus la mişcarea tautocronă rectilinie a unui punct. Să vedem care este condiţia necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia (3) să definească o mişcare tautocronă. In acest scop vom utiliza metoda lui Puiseux. Luăm punctul de sosire sau punctul de tautocronism drept origine O a parametrului s şi notăm cu s_0 valoarea lui s la momentul iniţial. Deoarece punctul P se mişcă

spre 0, oricare ar fi abscisa s_0 a poziţiei sale iniţiale, rezultă că trebuie să avem $sf(s) < 0$, deci, 0 reprezintă o poziţie de echilibru stabil a punctului reprezentativ P.

Din ecuaţia de mişcare (3) deducem integrala energiei

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 = \int_{s_0}^{s} f(\sigma)d\sigma \quad . \tag{4}$$

Să punem, pentru prescurtare,

$$2\int_{0}^{s} f(\sigma)d\sigma = -\varphi(s) \quad . \tag{5}$$

Funcţia $\varphi(s)$ este pozitivă pentru orice $s \neq 0$, este nulă pentru $s = 0$ şi satisface relaţia $\varphi'(s) = -2f(s)$.

Pentru a fixa ideile să presupunem $s_0 > 0$. Atunci din (4) obţinem

$$\dot{s} = -\sqrt{\varphi(s_0) - \varphi(s)} \tag{6}$$

şi timpul T în care P ajunge în 0 este dat de formula

$$T = \int_{0}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s_0) - \varphi(s)}} \quad . \tag{7}$$

Dacă notăm

$$\varphi(s) = u \ , \quad \varphi(s_0) = u_0 \ , \tag{8}$$

deoarece $\varphi(s)$ este o funcţie crescătoare pentru $s > 0$, rezultă că pentru un u dat există o singură valoare pozitivă $s = s(u)$. Cu ajutorul schimbării de variabilă (8), formula (7) devine

$$T = \int_{0}^{u_0} \frac{s'(u)du}{\sqrt{u_0 - u}} \quad . \tag{9}$$

Mişcarea lui P este tautocronă dacă şi numai dacă T nu depinde de s_0 , adică de u_0. Această condiţie se exprimă prin anularea derivatei lui T în raport cu u_0, oricare ar fi u_0 . Pentru a calcula mai uşor derivata lui T în raport cu u_0 ,

transformăm integrala din (9) într-o integrală cu limite independente de u_o. Astfel, punînd $u = u_o x$, avem

$$T = \int_0^1 \frac{s'(u_o x)\sqrt{u_o}}{\sqrt{1-x}}\,dx , \tag{10}$$

de unde obţinem

$$\frac{dT}{du_o} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2u_o x s''(u_o x)+s'(u_o x)}{\sqrt{u_o-u_o x}}\,dx .$$

Revenind la variabila de integrare u, găsim

$$\frac{dT}{du_o} = \frac{1}{2}\int_0^{u_o} \frac{2us''(u) + s'(u)}{u_o\sqrt{u_o-u}}\,du . \tag{11}$$

Din anularea lui $\frac{dT}{du_o}$ pentru orice u_o, deducem

$$2us''(u) + s'(u) = 0 . \tag{12}$$

Cum $s(0) = 0$, ecuaţia diferenţială (12) dă

$$s = \frac{1}{k}\sqrt{u} , \quad k = \text{const.},$$

de-i

$$u = \varphi(s) = k^2 s^2$$

şi

$$f(s) = -\frac{1}{2}\varphi'(s) = -k^2 s . \tag{13}$$

Prin urmare, trebuie să avem

$$Q_i dq^i = -k^2 s\,ds . \tag{14}$$

Reciproc, dacă putem găsi n funcţii $q^i(s)$ care verifică ecuaţiile (2) şi (14), atunci sistemul mecanic devine cu legături complete, poziţia sa depinde numai de parametrul s şi mişcarea este tautocronă.

Deoarece pentru determinarea funcţiilor $q^i(s)$, $i=\overline{1,n}$, avem numai două ecuaţii, rezultă că putem da în mod arbitrar n-2 relaţii compatabile între $q^1, q^2, \ldots, q^n$ şi s.

346. Un regulator Watt constă din patru bare identice OA, OB, AC şi BC, de mase neglijabile, două bile A şi B , fiecare de masă m şi culisa C , de masă km , care poate aluneca, fără frecare, pe axa verticală descendentă Ox_3 (v.fig. 46). Barele sînt articulate în punctele O,A,B şi C, punctul O este fix, iar întregul sistem se roteşte, fără frecare, în jurul axei Ox_3. Să se studieze mişcarea regulatorului.

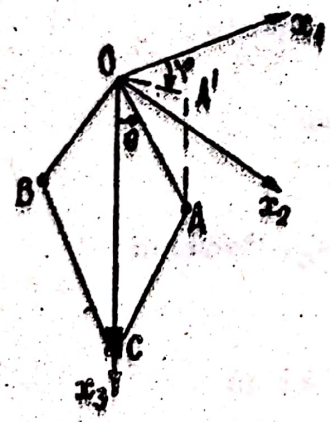

Fig.46

Rezolvare. Fie a lungimea comună a barelor date. Avem un sistem mecanic olonom şi scleronom, cu două grade de libertate. Luăm drept parametri unghiul θ pe care îl face OA cu axa Ox_3 şi unghiul de rotaţie φ al sistemului în jurul axei Ox_3. Problema este posibilă pentru $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ şi $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Dacă alegem în mod potrivit sistemul de coordonate, putem scrie condiţiile iniţiale sub forma

(1) $t = 0,\ \varphi = 0,\ \theta = \theta_0,\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0,\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0,\ \theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}],\ \dot{\varphi}_0 > 0.$

Vom utiliza ecuaţiile lui Lagrange (18,8), luînd $q^1 = \varphi$ şi $q^2 = \theta$. Energia cinetică a sistemului este formată din energia cinetică a bilelor A,B şi a culisei C. Vectorii de poziţie ai punctelor A,B şi C au expresiile

$$(2)\quad \begin{cases} \bar{r}_A = a\left[(\bar{e}_1\cos\varphi + \bar{e}_2\sin\varphi)\sin\theta + \bar{e}_3\cos\theta\right], \\ \bar{r}_B = a\left[-(\bar{e}_1\cos\varphi + \bar{e}_2\sin\varphi)\sin\theta + \bar{e}_3\cos\theta\right], \\ \bar{r}_C = 2a\bar{e}_3\cos\theta , \end{cases}$$

iar vitezele celor trei puncte sînt următoarele

$$(3)\quad \begin{cases} \bar{v}_A = a\left[(\bar{e}_1\cos\varphi + \bar{e}_2\sin\varphi)\,\dot\theta\cos\theta - \right. \\ \qquad \left. -(\bar{e}_1\sin\varphi - \bar{e}_2\cos\varphi)\,\dot\varphi\sin\theta - \bar{e}_3\dot\theta\sin\theta\right], \\ \bar{v}_B = a\left[-(\bar{e}_1\cos\varphi + \bar{e}_2\sin\varphi)\,\dot\theta\cos\theta + \right. \\ \qquad \left. +(\bar{e}_1\sin\varphi - \bar{e}_2\cos\varphi)\,\dot\varphi\sin\theta - \bar{e}_3\dot\theta\sin\theta\right], \\ \bar{v}_C = -2a\bar{e}_3\dot\theta\sin\theta\ . \end{cases}$$

Prin urmare, avem

$$\bar{v}_A^2 = \bar{v}_B^2 = a^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta),\quad \bar{v}_C^2 = 4a^2\dot\theta^2\sin^2\theta\ ,$$

deci, energia cinetică a regulatorului este dată de

$$(4)\qquad E = a^2m\left[(1+2k\sin^2\theta)\,\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right]\ .$$

Din (4) obţinem

$$\frac{\partial E}{\partial\dot\varphi} = 2a^2m\dot\varphi\sin^2\theta\ ,\quad \frac{E}{\partial\dot\theta} = 2a^2m(1+2k\sin^2\theta)\dot\theta\ ,$$

$$\frac{\partial E}{\partial\varphi} = 0,\quad \frac{\partial E}{\partial\theta} = a^2m(\dot\varphi^2 + 2k\dot\theta^2)\sin 2\theta\ .$$

Asupra sistemului acţionează greutăţilor bilelor A,B şi a culisei C. Lucrul mecanic virtual al forţelor date are expresia

$$\delta\mathcal{L} = mg\bar{e}_3(-a\bar{e}_3\delta\theta\sin\theta + \ldots) + mg\bar{e}_3(-a\bar{e}_3\delta\theta\sin\theta - \ldots) - $$
$$- kmg\bar{e}_3(2a\bar{e}_3\delta\theta\sin\theta) = -2amg(1+k)\delta\theta\sin\theta\ ,$$

unde punctele de suspensie din paranteze reprezintă termeni al căror sport în produsul scalar este nul. Astfel, componentele generalizate Φ şi Θ ale forţelor date sînt definite prin egalităţile

$$\Phi = 0\ ,\quad \Theta = -2amg(1+k)\sin\theta\ .$$

Ecuaţiile lui Lagrange vor fi

$$(5)\qquad \frac{d}{dt}(\dot\varphi\sin^2\theta) = 0,\quad \frac{d}{dt}\left[(1+2k\sin^2\theta)\dot\theta\right] -$$
$$-(\dot\varphi^2 + 2k\dot\theta^2)\sin\theta\cos\theta = -(1+k)\frac{g}{a}\sin\theta\ .$$

Variabila φ este ciclică şi sistemul mecanic este conservativ, deci, ecuaţiile (5) admit două integrale prime şi anume

$$(6)\quad \dot\varphi\sin^2\theta = C,\quad (1+2k\sin^2\theta)\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta = 2(1+k)\frac{g}{a}\cos\theta + h\ ,$$

unde

(7) $C=\dot{\varphi}_0\sin^2\theta_0$, $h=(1+2k\sin^2\theta_0)\dot{\theta}_0^2+\dot{\varphi}_0^2\sin^2\theta_0-2(1+k)\frac{g}{a}\cos\theta_0$.

Ecuația $(6)_1$ este de forma (18.13) și reprezintă integrala ariilor (v. și formula (13.11)), iar ecuația $(7)_2$ reprezintă integrala energiei (18.19). Sistemul (6) se integrează prin două cuadraturi.

Prin eliminarea lui $\dot{\varphi}$ din ecuațiile (6) deducem

$$(8)\qquad \dot{\theta}^2=\frac{[ab+2(1+k)g\cos\theta]\sin^2\theta-aC^2}{a(1+2k\sin^2\theta)\sin^2\theta}.$$

Dacă punem

$$(9)\qquad u=\cos\theta\ ,\ u\in[0,1],\quad u_0=\cos\theta_0,\ u_0\in[0,1)\ ,$$

obținem ecuația diferențială în u

$$(10)\quad \dot{u}^2=\frac{[ab+2(1+k)gu](1-u^2)-aC^2}{a(1+2k-2ku^2)}=\frac{f(u)}{a(1+2k-2ku^2)}\ ,$$

care este de tipul ecuației (3) de la problema 162.

Pentru discuția ecuației (10) trebuie să cunoaștem zerourile polinomului f(u). Facem observația că din (1) și (7) rezultă $C>0$. Pe de altă parte, avem

$$(11)\qquad f(u_0)=a(1+2k\sin^2\theta_0)\dot{\theta}_0^2\sin^2\theta_0$$

și

$$(12)\quad f(0)=a(1+2k\sin^2\theta_0)\dot{\theta}_0^2+a\dot{\varphi}_0^2\sin^2\theta_0\cos^2\theta_0-2(1+k)g\cos\theta_0.$$

De asemenea, se vede ușor că $f(\pm1)<0$ și $f(-\infty)>0$. Așadar, polinomul f(u) are un zero $u_3\in(-\infty,-1)$, căruia nu-i corespunde o valoare reală pentru θ.

In cazul $\dot{\theta}_0\neq0$, adică $f(u_0)>0$, rezultă că polinomul f(u) are un zero $u_1\in(u_0,1)$ și un zero $u_2\in(-1,u_0)$. Valorii u_1 îi corespunde unghiul θ_1, astfel încît $\cos\theta_1=u_1$ și $\theta_1\in(0,\theta_0)$. Dacă $f(0)\leq0$, atunci $u_2\in[0,u_0)$, iar valorii u_2 îi corespunde unghiul θ_2, astfel încît $\cos\theta_2=u_2$ și

$\theta_2 \in (\theta_0, \frac{\pi}{2}]$. Prin urmare, θ variază periodic între θ_1 și θ_2, $\theta_1 < \theta_2$. Durata unei perioade complete este dată de formula

$$T = 2\int_{u_2}^{u_1} \sqrt{\frac{a(1+2k-2ku^2)}{f(u)}}\, du \,. \tag{13}$$

Pentru $f(0)>0$, avem $u_2 \in (-1,0)$ și unghiul θ_2 corespunzător nu este în intervalul $[0,\frac{\pi}{2}]$ în care este definit θ. Deducem că pentru $\dot\theta_0 < 0$, la începutul mișcării, unghiul θ descrește de la θ_0 până la θ_1 și apoi crește de la θ_1 la $\frac{\pi}{2}$, cînd punctul C ajunge în O. In continuare sistemul rămîne în această poziție limită și se rotește în jurul axei Ox_3. Dacă $\dot\theta_0 > 0$ mișcarea se face în același mod, cu deosebirea că lipsește faza mișcării în care θ descrește de la θ_0 la θ_1 și apoi crește de la θ_1 la θ_0.

In sfîrșit, în cazul $\dot\theta_0 = 0$, avem $f(u_0) = 0$, deci, u_0 este un zero al polinomului $f(u)$. Presupunem $a\dot\varphi_0^2\cos\theta_0 \neq (1+k)g$, căci în caz contrar u_0 este un zero dublu al lui $f(u)$ și θ rămîne constant în tot timpul mișcării. Celelalte două zerouri ale lui $f(u)$ sînt u_3 și

$$u_2 = -\frac{1}{4(1+k)g}\left[a\dot\varphi_0^2\sin^2\theta_0 - \sqrt{a^2\dot\varphi_0^4\sin^4\theta_0 - 8(1+k)g\frac{f(0)}{\cos\theta_0}}\right]. \tag{14}$$

Astfel, pentru $f(0)\leq 0$, avem $u_2 \in [0,1)$ și θ variază periodic între θ_0 și θ_2, care reprezintă unghiurile corespunzătoare valorilor u_0 și u_2. Dacă $f(0)>0$, atunci $u_2 \in (-1,0)$ și rezultă că θ crește de la θ_0 la $\frac{\pi}{2}$, iar apoi sistemul rămîne în această poziție și se rotește în jurul axei Ox_3.

347. Două bare omogene AC și BC articulate în punctul C, de lungime a și de masă m fiecare, pot aluneca, fără frecare, cu extremitățile A și B pe axa verticală ascendentă Ox_3 și se pot roti în jurul acestei axe. Să se studieze mișcarea acestui sistem.

Rezolvare. Sistemul mecanic dat este olonom scleronom și are trei grade de libertate. Luăm ca parametri unghiul de rotație φ al sistemului în jurul axei Ox_3, unghiul $\theta = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$ și distanța $\overline{OD} = z$, D fiind mijlocul segmentului $\overline{AB}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (v. fig. 47).

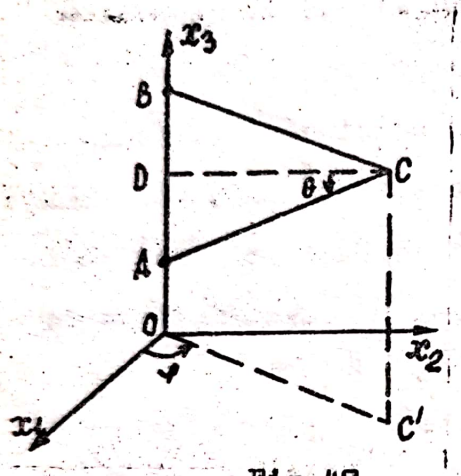

Fig. 47

Condițiile inițiale le putem lua sub forma

(1) $t=0,\ \varphi=0,\ \theta=\theta_0,\ z=0,\ \dot\varphi=\dot\varphi_0>0,\ \dot\theta=\dot\theta_0,\ \dot z=\dot z_0,\ \theta_0\in[0,\frac{\pi}{2})$.

Vom utiliza ecuațiile lui Lagrange. Energia cinetică a sistemului este formată din energia cinetică a celor două bare.

Vectorul de poziție al unui punct P al sistemului are expresia

(2) $\bar r = \lambda(\bar e_1\cos\varphi + \bar e_2\sin\varphi)\cos\theta + [z \pm (a-\lambda)\sin\theta]\,\bar e_3, \qquad \lambda\in[0,a]$,

unde în paranteza dreaptă se ia + sau − după cum $P\in(BC)$ sau $P\in(AC)$.

Din (2) deducem că viteza punctului P este dată de

(3) $\bar v = -\lambda(\bar e_1\cos\varphi + \bar e_2\sin\varphi)\dot\theta\sin\theta - \lambda(\bar e_1\sin\varphi - \bar e_2\cos\varphi)\dot\varphi\cos\theta + [\dot z \pm (a-\lambda)\dot\theta\cos\theta]\,\bar e_3$,

deci

(4) $v^2 = \lambda^2(\dot\theta^2\sin^2\theta + \dot\varphi^2\cos^2\theta) + [\dot z \pm (a-\lambda)\dot\theta\cos\theta]^2$.

Astfel, energia cinetică a sistemului devine

$$E = E_{AC} + E_{BC} = \int_0^a \left[\lambda^2(\dot\theta^2\sin^2\theta + \dot\varphi^2\cos^2\theta) + \dot z^2 + (a-\lambda)^2\dot\theta^2\cos^2\theta\right]\rho\,d\lambda,$$

prin urmare

$$(5) \qquad E = m\left[\frac{1}{3}a^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\cos^2\theta) + \dot z^2\right].$$

Forţele care acţionează asupra sistemului mecanic sînt greutăţile celor două bare, aplicate în centrele lor de masă. Rezultă că există un potenţial al forţelor date şi este de forma

$$(6) \qquad U = -2mgz .$$

Aşadar, potenţialul cinetic este definit prin relaţia

$$(7) \qquad L = m\left[\frac{1}{3}a^2(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\cos^2\theta) + \dot z^2 - 2gz\right],$$

iar ecuaţiile lui Lagrange (18.11) devin

$$(8) \qquad \frac{d}{dt}(\dot\varphi\cos^2\theta) = 0, \quad \ddot\theta + \dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta = 0, \quad \ddot z + g = 0 .$$

Ecuaţiile (8) şi (1) conduc la

$$(9) \qquad \dot\varphi\cos^2\theta = \dot\varphi_0\cos^2\theta_0, \quad \dot\theta^2 = \dot\theta_0^2 + \dot\varphi_0^2\left(1 - \frac{\cos^2\theta_0}{\cos^2\theta}\right)\cos^2\theta_0 ,$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot z_0 t .$$

Dacă punem

$$(10) \qquad k^2 = \frac{\dot\theta_0^2 + \dot\varphi_0^2\cos^2\theta_0\sin^2\theta_0}{\dot\theta_0^2 + \dot\varphi_0^2\cos^2\theta_0} < 1, \quad \omega^2 = \dot\theta_0^2 + \dot\varphi_0^2\cos^2\theta_0 ,$$

atunci din egalitatea $(9)_2$ obţinem

$$(11) \qquad \frac{d(\sin\theta)}{\sqrt{k^2 - \sin^2\theta}} = \varepsilon\omega dt ,$$

unde $\varepsilon = +1$ pentru $\dot\theta_0 > 0$ şi $\varepsilon = -1$ pentru $\dot\theta_0 \leq 0$.

Din (11) şi (1) deducem

$$\arcsin\frac{\sin\theta}{k} = \varepsilon\omega t + \arcsin\frac{\sin\theta_0}{k} ,$$

sau

$$(12) \qquad \sin\theta = \sin\theta_0\cos\omega t + \frac{\dot\theta_0\cos\theta_0}{\omega}\sin\omega t .$$

Prin eliminarea lui θ din ecuaţiile $(9)_1$ şi (12) găsim

$$d\varphi = \frac{\omega\dot\varphi_0\cos^2\theta_0\, d\left[(\dot\theta_0^2\sin^2\theta_0 + \dot\varphi_0^2\cos^2\theta_0)\operatorname{tg}\omega t\right]}{\left[(\dot\theta_0^2\sin^2\theta_0 + \dot\varphi_0^2\cos^2\theta_0)\operatorname{tg}\omega t - \omega\dot\theta_0\sin\theta_0\cos\theta_0\right]^2 + \omega^2\dot\varphi_0^2\cos^4\theta_0}$$

şi, prin urmare,

$$(13) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0 \operatorname{tg}\omega t}{\omega - \dot{\theta}_0 \operatorname{tg}\theta_0 \operatorname{tg}\omega t} .$$

Formulele $(9)_3$, (12) şi (13) reprezintă legea mişcării sistemului.

348. Un tub circular omogen, de secţiune neglijabilă, este obligat să rămînă într-un plan vertical şi se rostogoleşte, fără alunecare, pe o orizontală a acestui plan. Un punct material Q se poate mişca, fără frecare, în interiorul tubului. Să se afle mişcarea sistemului presupunînd nule vitezele iniţiale ale tubului şi punctului material.

Rezolvare. Fie Ox_1 axa orizontală pe care se rostogoleşte cercul şi Ox_2 axa verticală ascendentă care trece prin punctul de contact iniţial al cercului cu Ox_1. Notăm cu R raza inelului, cu M masa sa şi cu m masa punctului Q. Tubul se mişcă în semiplanul $x_2 \geqslant 0$. Fie, la momentul t, A punctul de contact al cercului cu axa Ox_1, C centrul cercului şi P punctul tubului care a fost punct de contact la momentul iniţial (v.fig.2). Avem un sistem mecanic olonom şi scleronom cu două grade de libertate. Luăm drept coordonate generalizate ale sistemului unghiul $\theta = \sphericalangle ACP$ şi unghiul $\varphi = \sphericalangle ACQ$.

Punctele P şi Q au, respectiv, vectorii de poziţie

$$(1) \qquad \begin{cases} \bar{r}_P = R\left[(\theta - \sin\theta)\bar{e}_1 + (1 - \cos\theta)\bar{e}_2\right], \\ \bar{r}_Q = R\left[(\theta - \sin\varphi)\bar{e}_1 + (1 - \cos\varphi)\bar{e}_2\right] \end{cases}$$

şi vitezele

$$(2) \qquad \begin{cases} \bar{v}_P = R\dot{\theta}\left[(1 - \cos\theta)\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \sin\theta\right], \\ \bar{v}_Q = R\left[(\dot{\theta} - \dot{\varphi}\cos\varphi)\bar{e}_1 + \dot{\varphi}\bar{e}_2 \sin\varphi\right]. \end{cases}$$

Condiţiile iniţiale au forma următoare

$$(3) \qquad t = 0, \quad \theta = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0.$$

Energia cinetică a tubului are expresia

$$E_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v_P^2 \rho R d\theta = MR^2\dot{\theta}^2 ,$$

iar punctul Q are energia cinetică

$$E_2 = \frac{1}{2} mR^2(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2) .$$

Astfel, energia cinetică a sistemului este dată de

$$(4)\quad E = \frac{1}{2} mR^2\left[(1+k)\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2\right], \quad k = 2\frac{M}{m} .$$

Deoarece cercul nu alunecă pe Ox_1, forţa de frecare ce ia naştere în A nu produce lucru mecanic pentru o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile şi avem

$$\delta\mathcal{L} = -mgR\sin\varphi\,\delta\varphi = \delta(mgR\cos\varphi) .$$

Prin urmare, există un potenţial al forţelor date şi anume

$$(5)\qquad U = mgR\cos\varphi .$$

Din relaţiile (4) şi (5) obţinem funcţia lui Lagrange

$$(6)\quad L = \frac{1}{2}mR^2\left[(1+k)\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2\right] + mgR\cos\varphi .$$

In cazul de faţă ecuaţiile lui Lagrange (18.11) devin

$$(7)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left[(1+k)\dot{\theta} - \dot{\varphi}\cos\varphi\right] = 0 , \\ \ddot{\varphi} - \ddot{\theta}\cos\varphi + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0 . \end{cases}$$

Variabila θ este ciclică şi sistemul mecanic este conservativ, deci, ecuaţiile (7) admit următoarele două integrale prime

$$(8)\qquad \begin{cases} (1+k)\dot{\theta} - \dot{\varphi}\cos\varphi = 0 , \\ (1+k)\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{R}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) , \end{cases}$$

unde am ţinut seama de condiţiile iniţiale (3).

Ecuaţia $(8)_1$ conduce la

$$(9)\qquad (1+k)\theta = \sin\varphi - \sin\varphi_0 ,$$

iar prin eliminarea lui $\dot{\theta}$ din ecuaţiile (8) găsim

$$(10)\qquad R(k+\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 = 2(1+k)g(\cos\varphi - \cos\varphi_0) .$$

Relaţiile (9) şi (10) ne permit să facem un studiul calitativ al mişcării sistemului. Presupunem $\varphi_0 \neq 0, \pi$, căci în caz contrar sistemul rămîne în echilibru. Dacă $\varphi_0 \in (0, \pi)$, atunci, începînd din momentul iniţial, unghiul φ descreşte de la φ_0 la $-\varphi_0$ şi, apoi, într-un interval de timp egal cu primul, φ variază în sens invers. In prima fază θ descreşte de la 0 la $-\frac{2}{1+k}\sin\varphi_0$, după care revine la valoarea iniţială ş.a.m.d. Pentru $\varphi_0 \in (-\pi, 0)$, mai întîi, unghiul φ creşte de la φ_0 la $|\varphi_0|$ şi după aceea variază în sens invers. Unghiul θ creşte de la 0 la $\frac{2}{1+k}\sin|\varphi_0|$, iar apoi revine la valoarea iniţială etc.

In concluzie, punctul Q execută o mişcare oscilatorie periodică, pe care, între poziţiile determinate de valorile $\varphi = \varphi_0$ şi $\varphi = -\varphi_0$, în timp ce centrul cercului oscilează periodic, pe dreapta $x_2 = R$, între poziţiile definite de $x_1 = 0$ şi $x_1 = \frac{2R}{1+k}\sin\varphi_0$.

Traiectoria lui Q se află prin eliminarea lui φ şi θ din (9) şi din următoarele două relaţii echivalente cu $(1)_2$

$$x_1 = R(\theta - \sin\varphi), \quad x_2 = R(1 - \cos\varphi).$$

Se obţine

$$(11) \qquad (1 + \frac{1}{k})^2 (x_1 + \frac{R}{1+k}\sin\varphi_0)^2 + (x_2 - R)^2 = R^2.$$

Ecuaţia (11) reprezintă o elipsă tangentă la Ox_1 şi a cărei axă mare este verticală. Punctul Q parcurge numai arcul elipsei (11) situat sub dreapta de ecuaţie $x_2 = R(1-\cos\varphi_0)$.

Observaţii. 1° Putem considera numai cazul $\varphi_0 \in (0, \pi)$, deoarece cazul $\varphi_0 \in (-\pi, 0)$ se reduce la precedentul prin schimbarea sensului axei Ox_1.

2° Dacă presupunem $M = 0$, atunci ecuaţia (10) dă

$$\sqrt{\frac{2g}{R}}\,dt = \frac{-\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}},$$

de unde rezultă

(12) $$t = \sqrt{\frac{2R}{g}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} .$$

Formula (12) reprezintă soluţia problemei pentru $t \in \left[0, 2\sqrt{\frac{R}{g}}\sin\frac{\varphi_0}{2}\right]$. In acest caz poziţia $\varphi = 0$ comportă o singularitate pe care nu o discutăm aici.

349. Două bare omogene A_1A_2 şi A_2A_3 articulate în punctul A_2, de lungime 2a şi de masă M fiecare, se mişcă, fără frecare, în planul orizontal x_1Ox_2. Să se studieze mişcarea acestui sistem.

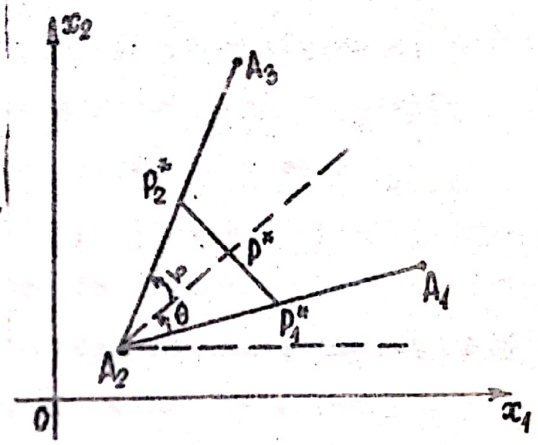

Fig.48

Rezolvare. In acest caz avem un sistem mecanic olonom şi scleronom cu patru grade de libertate. Luăm drept parametri ai mişcării coordonatele x_1^*, x_2^* ale centrului de masă P^* al sistemului, unghiul θ pe care îl face dreapta A_2P^* cu axa Ox_1 şi unghiul $\varphi = \frac{1}{2}\sphericalangle A_1A_2A_3$ (v.fig.48). Punctul P^* se află la mijlocul segmentului care uneşte mijloacele P_1^* şi P_2^* ale barelor A_1A_2 şi A_2A_3.

Să calculăm energia cinetică a sistemului. In acest scop vom utiliza teorema lui König (13.7), mai întîi pentru întregul sistem şi apoi pentru fiecare bară în parte. Masa sistemului fiind 2M, avem

(1) $$E = M(\dot{x}_1^{*2} + \dot{x}_2^{*2}) + E^* .$$

Dacă notăm cu E_i^* şi E_i^{**} energia cinetică a barei A_iA_{i+1} faţă de punctul P^* şi, respectiv, P_i^*, $i = 1,2$, avem

(2) $$E^* = E_1^* + E_2^* , \quad E_i^* = \frac{1}{2}M\bar{v}_i^{*2} + E_i^{**} , \quad i = 1,2,$$

unde $\bar{v}_i^*$ este viteza punctului P_i^* faţă de P^*.

Cum unghiurile barelor A_2A_1 şi A_2A_3 cu axa Ox_1 , sînt, respectiv , $\theta - \varphi$ şi $\theta + \varphi$, iar

(3) $$\overrightarrow{P^*P_1^*} = -\overrightarrow{P^*P_2^*} = a(\bar{e}_1 \sin\theta - \bar{e}_2 \cos\theta)\sin\varphi ,$$

rezultă

(4) $$E_1^{**} = \frac{1}{6} Ma^2(\dot{\theta} - \dot{\varphi})^2 , \quad E_2^{**} = \frac{1}{6} Ma^2(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2$$

şi

(5) $$\bar{v}_1^{*2} = \bar{v}_2^{*2} = a^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2\varphi + \dot{\theta}^2 \sin^2\varphi) .$$

Relaţiile (1),(2),(4) şi (5) conduc la

(6) $$E = M\left[\dot{x}_1^{*2} + \dot{x}_2^{*2} + (k^2 + a^2\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + (k^2 + a^2\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2\right],$$

unde $k = \frac{a}{\sqrt{3}}$ este raza de giraţie a uneia dintre bare.

In cazul de faţă, singurele forţe date sînt greutăţile barelor ale căror lucruri mecanice sînt nule, deoarece planul x_1Ox_2 este orizontal. Prin urmare, funcţia de forţe este $U = 0$.

Facem observaţia că x_1^*, x_2^* şi θ sînt variabile ciclice şi că sistemul dat este conservativ, deci există trei integrale prime ale ecuaţiilor mişcării de forma (18.13) şi integrala energiei (18.19). Astfel, putem scrie relaţiile

(7) $$\dot{x}_1^* = C_1 , \quad \dot{x}_2^* = C_2 ,$$

(8) $$(1 + 3\sin^2\varphi)\dot{\theta} = C$$

şi

(9) $$(1 + 3\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + (1 + 3\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2 = A^2 ,$$

C_1, C_2, C şi A fiind constante $(A > 0)$.

Ecuaţiile (7) exprimă faptul că centrul de masă al sistemului se mişcă rectiliniu şi uniform, rezultat ce poate fi obţinut imediat din teorema mişcării centrului de masă (13.9).

Egalitatea (8) ne arată că $\dot{\theta}$ are un semn constant, aşadar, dreapta A_2P^* se roteşte în acelaşi sens în jurul lui P^*, iar $\dot{\theta}$ este cuprins între $\frac{1}{4}C$ şi C . Putem presupune $C > 0$.

Prin eliminarea lui $\dot{\theta}$ din ecuațiile (8) și (9) deducem

(10) $(1+3\sin^2\varphi)(1+3\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2 = 3A\sin^2\varphi + A^2 - C^2$.

Pentru ca mișcarea sistemului să fie posibilă este necesar ca membrul secund al egalității (10) să fie nenegativ pentru orice φ . Următoarea relație se verifică fără dificultate

(11) $$C \leq 2A .$$

Discuția ecuației (10) comportă trei cazuri și anume :

1^0 $A<C$. Ținînd seama de condiția (11) rezultă că putem pune

$$C^2 - A^2 = 3A^2\sin^2\alpha ,$$

α fiind o constantă reală. Astfel, condiția pe care trebuie să o satisfacă φ se reduce la $\sin^2\varphi \geq \sin^2\alpha$, adică φ variază între α și $\pi - \alpha$. In acest caz fiecare bară execută o mișcare oscilatorie periodică față de A_2P^*.

2^0 $A = C$. Rezultă că unghiul φ poate lua orice valoare, însă, atunci cînd φ tinde la π sau la zero, t tinde la infinit. Cu alte cuvinte, cele două bare tind să se suprapună fără să ajungă vreodată la aceasta.

3^0 $A>C$. Unghiul φ poate lua orice valoare și barele se apropie sau se depărtează, după cum $\dot{\varphi}$ este negativ sau pozitiv, pînă în momentul în care se produce o ciocnire ($\varphi = 0$ sau $\varphi = \pi$) .

350. Două bare identice A_1A_2 și A_2A_3 articulate în punctul A_2 , de lungime $3a$ și de masă M fiecare, se mișcă, fără frecare, în planul orizontal x_1Ox_2. In orice punct P al sistemului masa specifică este proporțională cu distanța la punctul A_2 . Extremitățile A_1 și A_3 sînt legate printr-un fir elastic și fără masă, a cărui tensiune are mărimea $T = \frac{1}{3} M\lambda^2(r-a)$, unde λ este o constantă, $3a$ este lungimea

naturală a firului şi $3r$ este lungimea sa alungită ($r>a$). Să se studieze mişcarea acestui sistem.

Rezolvare. In continuare vom utiliza unele notaţii de la problema 349, deoarece aceste două probleme sînt asemănătoare. Astfel, luăm drept parametri ai mişcării pe x_1^*, x_2^*, θ şi φ (v.fig.48). In cazul de faţă centrul de masă P_1^* împarte bara A_2A_1 în raportul 2/1, iar P_2^* împarte pe A_2A_3 în acelaşi raport, deci, avem $\overline{A_2P_1^*} = \overline{A_2P_2^*} = 2a$. Prin urmare, centrul de masă P^* al sistemului coincide cu punctul de intersecţie al medianelor triunghiului $A_1A_2A_3$ şi avem

$$(1)\quad \overrightarrow{P^*P_1^*} = -\overrightarrow{P^*P_2^*} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_3A_1} = 2a(\bar{e}_1\sin\theta - \bar{e}_2\cos\theta)\sin\varphi .$$

Rezultă

$$(2)\quad \bar{v}_1^{*2} = \bar{v}_2^{*2} = 4a^2(\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \dot{\theta}^2\sin^2\varphi) .$$

Pe de altă parte, momentul de inerţie al uneia dintre cele două bare faţă de punctul A_2 este dat de

$$I = \mu\int_0^{3a} x^3dx = \frac{9}{2}Ma^2 , \quad M = \frac{9}{2}\mu a^2 , \quad \mu = \text{const.},$$

aşa încît teorema lui Steiner (11.10) ne arată că momentul de inerţie al fiecăreia dintre barele date, faţă de centrul de masă respectiv, are expresia

$$(3)\quad I^* = \frac{1}{2}Ma^2 .$$

Cu acestea obţinem

$$(4)\quad E_1^{**} = \frac{1}{4}Ma^2(\dot{\theta}-\dot{\varphi})^2 , \quad E_2^{**} = \frac{1}{4}Ma^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2 ,$$

deci

$$(5)\quad E = M\left[\dot{x}^{*2}+\dot{x}^{*2} + \frac{1}{2}a^2(1+8\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}a^2(1+8\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2\right] .$$

Atîta timp cît firul nu este întins, adică $\varphi\in[0,\frac{\pi}{6}]$, la fel ca în problema 349, avem $U = 0$. Dacă firul este întins, deci $\varphi\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$, atunci în punctele A_1 şi A_3 acţionează tensiunile firului $\bar{T}_1$ şi $\bar{T}_3$ date de

(6) $$\bar{T}_1 = -\bar{T}_3 = T\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{3r}, \quad 3r = |\overrightarrow{A_1A_3}| = 6a\sin\varphi .$$

Lucrul mecanic elementar al tensiunilor firului pentru o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile are expresia

$$\delta\mathcal{L} = \bar{T}_1\delta\bar{r}_1 + \bar{T}_3\delta\bar{r}_3 = \delta\left[2Ma^2\lambda^2(1-\sin\varphi)\sin\varphi\right] .$$

Aşadar, există un potenţial al forţelor date şi este de forma

(7) $$U = \begin{cases} 0, & \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right], \\ -\frac{1}{2}Ma^2\lambda^2(2\sin\varphi-1)^2, & \varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

In acelaşi mod ca la problema 349 deducem că x_1^* şi x_2^* verifică ecuaţiile (7) de la problema citată, iar Θ şi φ satisfac relaţiile

(8) $$(1+8\sin^2\varphi)\dot{\Theta} = C, \quad \dot{\Theta}\in\left[\frac{1}{9}C, C\right]$$

şi

(9) $$(1+8\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2+(1+8\sin^2\varphi)\dot{\Theta}^2 = \begin{cases} A^2, & \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right], \\ A^2-\lambda^2(2\sin\varphi-1)^2, & \varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$$

C şi A fiind constante pozitive .

Dacă eliminăm pe $\dot{\Theta}$ din (8) şi (9) obţinem

(10) $$(1+8\sin^2\varphi)(1+8\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2 = \begin{cases} A^2(1+8\sin^2\varphi)-C^2, & \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right], \\ (1+8\sin^2\varphi)\left[A^2-\lambda^2(2\sin\varphi-1)^2\right]-C^2, & \varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Rezultă că membrul drept al relaţiei (10) trebuie să fie nenegativ pentru orice $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Este uşor de văzut că avem

(11) $$C \leq 3A .$$

Cu unele modificări evidente, relaţia (10) se discută la fel ca ecuaţia (10) de la problema 349.

251. Extremităţile unei bare omogene AB de lungime 2a şi de masă m pot aluneca, fără frecare, pe un cerc orizontal de rază R. Bara fiind imobilă, în mijlocul său C se află în repaus un punct material de aceeaşi masă m . La momentul t = 0 punctul material începe să se mişte pe bara AB, de la C către B, cu o viteză constantă în raport cu bara. Să se studieze mişcarea sistemului format din bara AB şi punctul material dat.

Rezolvare. Fie x_1Ox_2 planul orizontal fix cu originea în centrul cercului dat. Presupunem că ordinea punctelor A şi B corespunde sensului direct de parcurgere a cercului. Notăm cu P poziţia punctului material pe bara AB la momentul t, cu v mărimea constantă a vitezei punctului în raport cu bara şi cu φ unghiul vectorului $\overline{OC}$ cu axa Ox_1 .

Rezultă $\overline{CP} = vt$, astfel încît coordonatele polare r ,θ ale punctului P au expresiile

$$(1)\quad r = \sqrt{R^2-a^2+v^2t^2}\ ,\quad \theta = \varphi + \operatorname{arctg}\frac{vt}{\sqrt{R^2-a^2}}\ ,\quad t \in \left[0, \frac{a}{v}\right] .$$

Poziţia sistemului la momentul t depinde de un parametru, unghiul φ , iar legăturile depind de timp, deoarece mişcarea punctului pe bară este dată dinainte. Prin urmare, acest sistem mecanic este olonom şi reonom.

Energia cinetică a sistemului este formată din energia cinetică a barei şi energia cinetică a punctului material. Cum energia cinetică a barei este egală cu $\frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2$, unde $I = m(\overline{OO}^2 + \frac{a^2}{3})$ reprezintă momentul de inerţie al barei în raport cu punctul O, obţinem

$$(2)\qquad T = \frac{m}{2}\left[(R^2 - \frac{2}{3}a^2)\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] .$$

Din egalităţile (1) şi (2) deducem

(3) $E = \frac{m}{2}\left[\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{v^4t^2}{r^2} + \left(r\dot{\varphi} + \frac{v}{r}\sqrt{R^2-a^2}\right)^2\right]$,

în care r se exprimă în funcţie de t prin formula $(1)_1$.

In cazul de faţă componenta generalizată a forţelor date este nulă şi E nu depinde explicit de φ . Deci φ este coordonată ciclică şi avem integrala primă de forma (18.13)

(4) $\left(2R^2 - \frac{5}{3}a^2 + v^2t^2\right)\dot{\varphi} + v\sqrt{R^2 - a^2} = C$, $C = \text{const.}$

Interpretarea mecanică a relaţiei (4) este imediată. Membrul stîng al egalităţii (4) reprezintă mărimea momentului cinetic al sistemului, prin urmare, ecuaţia (4) exprimă integrala ariilor (13.11) în cazul considerat.

Astfel, momentul cinetic al sistemului este constant în tot timpul mişcării şi, cum la momentul iniţial este nul , fiindcă punctul material şi bara pornesc din repaus, va fi nul la orice moment t . Rezultă $C = 0$ şi din ecuaţia (4) se găseşte

(5) $\varphi = \varphi_0 - \sqrt{\frac{R^2 - a^2}{2R^2 - \frac{5}{3}a^2}}\operatorname{arctg}\frac{vt}{\sqrt{2R^2 - \frac{5}{3}a^2}}$, $t \in \left[0, \frac{a}{v}\right]$,

unde φ_0 este valoarea lui φ la momentul $t = 0$. Putem lua $\varphi_0 = 0$.

Observaţie. Dacă, la un moment oarecare, punctul material se opreşte pe bară, atunci întregul sistem devine imobil, căci în caz contrar momentul cinetic este diferit de zero.

352. Un cerc omogen de rază R şi de masă M, se poate roti fără frecare în jurul unui punct fix O al său, pe un plan orizontal. Cercul fiind imobil, în punctul A al cercului, diametral opus lui O , se află în repaus un punct material de masă m. La momentul $t = 0$ punctul începe să se mişte pe cerc în

sens direct cu o viteză de mărime constantă v în raport cu cercul. Să se afle mişcarea sistemului.

Rezolvare. Luăm reperul ortogonal fix x_1Ox_2 avînd axa Ox_1 coliniară cu poziţia iniţială a vectorului $\overrightarrow{OA}$. Deoarece, prin ipoteză, punctul material se mişcă pe cerc în sens direct, rezultă că cercul se va roti în jurul lui O în sens invers. Fie, la momentul t, P poziţia punctului material pe cerc şi r, θ coordonatele sale polare, θ fiind presupus pozitiv. La acelaşi moment, diametrul OA face cu axa Ox_1 un unghi negativ pe care îl notăm cu $-\varphi$, astfel încît φ reprezintă valoarea absolută a unghiului x_1OA. Dacă exprimăm faptul că arcul de cerc AP parcurs de punctul material este egal cu vt, cum $\sphericalangle AOP = \theta + \varphi$, obţinem

(1) $\quad 2R(\theta+\varphi) = vt$, sau $\theta+\varphi = \lambda t$, $\lambda = \frac{v}{2R}$.

Pe de altă parte, din triunghiul dreptunghic APO deducem

(2) $\quad r = 2R\cos\lambda t$.

Prin urmare, sistemul mecanic dat este olonom şi reonom, cu un grad de libertate. Energia cinetică a sistemului are expresia

(3) $\quad E = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$,

unde $I = 2R^2M$ este momentul de inerţie al cercului faţă de punctul O.

Alegem pe θ drept coordonată generalizată a sistemului. Rezultă că θ este variabilă ciclică şi are loc integrala primă

(4) $\quad (1 + a\cos^2\lambda t)\dot{\theta} - \lambda = C$, $a = 2\frac{m}{M}$, $C = \text{const.}$

Egalitatea (4) ne arată că momentul cinetic al sistemului în raport cu punctul O este constant şi, cum sistemul porneşte din repaus, constanta C a ariilor este nulă. Astfel ecuaţia (4) dă

$$d\theta = \frac{\lambda\, dt}{1+a\cos^2\lambda t} = \frac{d(tg\lambda t)}{1+a+tg^2\lambda t}$$

şi, prin integrare, găsim

$$(5) \qquad \theta = \frac{1}{\sqrt{1+a}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} \lambda t}{\sqrt{1+a}}\right),$$

deoarece pentru $t = 0$ avem $\theta = 0$. Relaţiile (1),(2) şi (5) definesc mişcarea sistemului dat. Timpul T în care punctul material ajunge în O se determină din (1) pentru $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ (sau din (2) pentru $r = 0$) şi are valoarea $T = \frac{\pi}{2\lambda}$. Unghiurile corespunzătoare θ şi φ sînt date de

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a}} \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a}}\right) \frac{\pi}{2}.$$

După ce ajunge în O, punctul material continuă să se rotească pe cerc, iar cercul continuă să se rotească în jurul lui O în sens contrar punctului material.

Observaţie. In această problemă am presupus că punctul O al cercului este fixat. Putem însă realiza o mişcare de rotaţie de acelaşi gen fără a fixa vreun punct, în modul următor. Considerăm două cercuri identice omogene de rază R şi de masă $\frac{M}{2}$ fiecare, tangente exterior şi sudate în punctul de tangenţă O. Acest ansamblu rigid poate aluneca pe un plan orizontal lucios. Cercurile fiind imobile, în punctele lor A_1 şi A_2 diametral opuse lui O, se află în repaus două puncte materiale de aceeaşi masă $\frac{m}{2}$. La momentul $t = 0$ punctele încep să se mişte pe cele două cercuri, în sens direct, cu viteze de aceeaşi mărime constantă v în raport cu cercurile, astfel încît la momentul t punctele materiale ocupă poziţiile P_1 şi P_2 simetrice în raport cu punctul O.

Se deduce că punctul O, care reprezintă centrul de masă al sistemului mecanic format din cercurile şi punctele materiale date, rămîne fix în timpul mişcării, fiindcă viteza iniţială a

sa este nulă. Cele două cercuri se rotesc în jurul lui O în sens invers mişcării punctelor materiale şi ecuaţiile acestei mişcări sînt identice cu ecuaţiile precedente.

353. O patină omogenă de lungime 2a şi de masă M alunecă pe un plan orizontal luciu. Să se studieze mişcarea patinei.

Rezolvare. Vom utiliza rezultatele de la problema 147. În planul orizontal x_1Ox_2, luăm drept parametri coordonatele x_1^*, x_2^* ale mijlocului patinei şi unghiul θ dintre patină şi axa Ox_1. Coordonatele generalizate x_1^*, x_2^* şi θ verifică legătura neolonomă de forma (18.20)

$$\dot{x}_2^* - \dot{x}_1^* \operatorname{tg}\theta = 0 . \tag{1}$$

Avem un sistem mecanic neolonom şi scleronom cu două grade de libertate. Mişcarea acestui sistem poate fi studiată cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange (18.21) sau a ecuaţiilor lui Appell (18.23). În continuare vom folosi ecuaţiile lui Appell. Vectorul de poziţie al unui punct P al patinei are expresia

$$\bar{r} = \bar{r}^* + \lambda(\bar{e}_1 \cos\theta + \bar{e}_2 \sin\theta), \quad \lambda \in [-a, +a] ,$$

iar acceleraţia punctului P este dată de

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}^* + \lambda(-\bar{e}_1 \sin\theta + \bar{e}_2 \cos\theta)\ddot{\theta} - \lambda(\bar{e}_1 \cos\theta + \bar{e}_2 \sin\theta)\dot{\theta}^2 .$$

Prin urmare, energia de acceleraţie are valoarea

$$S = \frac{M}{2}\left[\ddot{x}_1^{*2} + \ddot{x}_2^{*2} + \frac{a^2}{3}(\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4)\right] . \tag{2}$$

În cazul de faţă componentele generalizate ale forţelor date sînt nule. Din compararea ecuaţiei (1) cu (18.20) deducem

$$\ell = 1, \; A_{11} = -\operatorname{tg}\theta , \; A_{12} = 1 , \; A_{13} = B_1 = 0 . \tag{3}$$

Avînd în vedere (2) şi (3), ecuaţiile lui Appell (18.23) dau

$$\ddot{x}_1^* = -\lambda_1 \operatorname{tg}\theta , \quad \ddot{x}_2^* = \lambda_1 , \quad \ddot{\theta} = 0 , \tag{4}$$

multiplicatorul lui Lagrange λ_1 fiind o funcţie necunoscută.

Condiţiile iniţiale le putem lua de forma

(5) $\quad t = 0,\ x_1^* = x_2^* = 0\ ,\ \theta = 0,\ \dot{x}_1^* = v^*\ ,\ \dot{x}_2^* = 0\ ,\ \dot{\theta} = \omega\ ,$

v^* şi ω fiind date.

Ecuaţiile (1),(4) şi (5) determină unic funcţiile necunoscute x_1^*, x_2^*, θ şi λ_1. Mai întîi rezultă $\theta = \omega t$. Apoi, prin eliminarea variabilelor x_2^* şi λ_1 din egalităţile (1) şi (4), obţinem

$$\ddot{x}_1^* + \omega \dot{x}_1^* \operatorname{tg} \omega t = 0\ ,$$

deci

(6) $$x_1^* = \frac{v^*}{\omega} \sin \omega t\ .$$

Din relaţiile (1),(5) şi (6) găsim

(7) $$x_2^* = \frac{v^*}{\omega}(1 - \cos \omega t\ ),$$

aşadar, mijlocul patinei descrie uniform cu o viteză de mărime v^*, cercul

$$x_1^2 + (x_2 - R)^2 = R^2\ ,\ R = \frac{v^*}{\omega}\ .$$

Multiplicatorul lui Lagrange are valoarea $\lambda_1 = v^* \omega \cos \omega t$.

Observaţie. Se pot folosi şi ecuaţiile lui Appell sub forma (18.25).

354. Să se studieze mişcarea de rostogolire şi pivotare, fără alunecare, a unei sfere rigide şi omogene, de rază R şi de masă M, pe un plan orizontal.

Rezolvare. Din punct de vedere cinematic, mişcarea aceasta a fost studiată la problema 148. Vom utiliza rezultatele stabilite la problema citată. Coordonatele generalizate $\xi_1^0, \xi_2^0, \psi, \varphi$ şi θ satisfac legăturile neolonome

(1) $$\begin{cases} \dot{\xi}_1^0 - R(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta) = 0\ , \\ \dot{\xi}_2^0 + R(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta) = 0\ . \end{cases}$$

Prin urmare, avem un sistem neolonom scleronom cu trei grade

de libertate. Vom folosi ecuaţiile lui Lagrange (18.21). Energia cinetică a sferei o putem calcula cu ajutorul formulei (14.7), în care punem $r^* = 0$, $\overline{v}_0 = \overline{v}^*$, $I_{ij} = \frac{2}{5} MR^2 \delta_{ij}$ (v. problema 250) şi ω_i cu expresiile (2.21). Se găseşte

$$(2) \quad E = \frac{M}{2}\left[\dot{\xi}_1^{o2} + \dot{\xi}_2^{o2} + \frac{2}{5}R^2(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta)\right].$$

Pe de altă parte, componentele generalizate ale forţelor date sînt nule, iar din compararea relaţiilor (1) cu (18.20), presupunînd numerotate coordonatele generalizate în ordinea $\xi_1^o, \xi_2^o, \psi, \varphi$ şi θ, deducem $\ell = 2$ şi

$$(3) \begin{cases} A_{11} = 1, \; A_{14} = R\cos\psi\sin\theta, \; A_{15} = -R\sin\psi, \; A_{12} = A_{13} = B_1 = 0, \\ A_{22} = 1, \; A_{24} = R\sin\psi\sin\theta, \; A_{25} = R\cos\psi, \; A_{21} = A_{23} = B_2 = 0. \end{cases}$$

Se obţin ecuaţiile

$$(4) \begin{cases} \ddot{\xi}_1^o = \lambda_1, \quad \ddot{\xi}_2^o = \lambda_2, \quad \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = 0, \\ \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = -\frac{5}{2MR}(\lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\psi)\sin\theta. \end{cases}$$

În sistemul (4) nu am inclus ecuaţia relativă la variabila θ, deoarece putem înlocui ecuaţia respectivă prin integrala primă a energiei

$$(5) \qquad E = h, \quad h = \text{const.}$$

După ce am scris ecuaţiile (4) şi (5) le putem transforma cu ajutorul relaţiile (1). Ecuaţia $(4)_3$ conduce la integrala primă

$$(6) \qquad \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \frac{5}{2MR^2}k, \quad k = \text{const.},$$

k reprezentînd componenta verticală a momentului cinetic.

Dacă ţinem seama de (1), (2) şi (6), egalitatea (5) devine

$$(7) \qquad \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta = A^2, \quad A^2 = \frac{5}{14\,MR^2}(4h - 5k^2).$$

Cu ajutorul ecuaţiilor (1), $(4)_1$ şi $(4)_2$ se verifică uşor că

$$\lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\psi = R\dot{\theta}\dot{\psi} - R\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\sin\theta).$$

Introducînd această valoare în ecuaţia $(4)_4$, după împărţirea cu $\dot\theta$, obţinem

$$\frac{d}{d\theta}(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)=\frac{5}{2}\left[\dot\psi-\frac{d}{d\theta}(\dot\varphi\sin\theta)\right]\sin\theta \quad . \tag{8}$$

Prin eliminarea lui $\dot\varphi$ din ecuaţiile (6) şi (8) deducem

$$\frac{d\dot\psi}{d\theta}+\frac{3+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\dot\psi=\frac{2B}{\sin 2\theta}\quad,\quad B=-\frac{15k}{14MR^2}\quad,$$

de unde rezultă

$$\dot\psi\sin^2\theta=B+C\cos\theta\,,\quad C=\text{const.} \tag{9}$$

Astfel, am găsit o a treia integrală primă a ecuaţiilor diferenţiale de mişcare. Rezolvarea problemei se reduce la cuadraturi deoarece, eliminînd pe $\dot\psi$ şi $\dot\varphi$ din ecuaţiile (6), (7) şi (9), obţinem o relaţie între $\dot\theta$ şi θ.

355. Să se studieze mişcarea de rostogolire şi pivotare, fără alunecare, a unui disc circular rigid şi omogen, de rază R şi masă M, pe un plan orizontal.

Rezolvare. Din punct de vedere cinematic această mişcare a fost studiată la problema 149. De data aceasta nu vom utiliza rezultatele de la problema citată. In locul unghiurilor ψ, φ şi θ introduse acolo, vom considera unghiurile lui Euler, care sînt notate la fel, însă au alte semnificaţii. Luăm axa fixă $\Omega\xi_3$ verticală ascendentă şi notăm cu ξ_i^0, $i=\overline{1,3}$, coordonatele centrului O al discului faţă de reperul fix (v.fig.21). Evident, avem $\xi_3^0=R\sin\theta$ şi încă două condiţii de legătură care exprimă faptul că mişcarea discului se face fără alunecare, adică viteza punctului discului, care la momentul t coincide cu punctul de contact I, este nulă. Vectorul $\overline{OI}$, conţinut în planul x_1Ox_2 şi perpendicular pe linia nodurilor (care este orizontală), se scrie sub forma (v.expresiile (2.19))

(1) $\overrightarrow{OI} = -R(\bar{e}_1 \sin\varphi + \bar{e}_2 \cos\varphi) = R\left[(\bar{\varepsilon}_1 \sin\psi - \bar{\varepsilon}_2 \cos\psi)\cos\theta - \bar{\varepsilon}_3 \sin\theta\right]$.

Dacă anulăm viteza punctului I obținem egalitatea

(2) $$\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overrightarrow{OI} = 0 ,$$

în care $\bar{v}_0$ are expresia (4) de la problema 149, iar componentele vectorului $\bar{\omega}$ față de reperul fix sînt date de formulele (2.22).

Rezultă că variabilele ξ_1^0, ξ_2^0, ψ, φ și θ satisfac relațiile neolonome

(3) $$\begin{cases} \dot{\xi}_1^0 + R(\dot{\psi}\cos\psi\cos\theta + \dot{\varphi}\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\sin\theta) = 0 , \\ \dot{\xi}_2^0 + R(\dot{\psi}\sin\psi\cos\theta + \dot{\varphi}\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\sin\theta) = 0 . \end{cases}$$

Prin urmare, avem un sistem neolonom scleronom cu trei grade de libertate. Vom folosi ecuațiile lui Lagrange (18.21). Energia cinetică a discului o putem calcula cu ajutorul formulei (14.7), în care punem $\bar{r}^* = 0$, $\bar{v}^* = \bar{v}_0$, $4I_{11} = 4I_{22} = 2I_{33} = MR^2$ și ω_i sînt dați de (2.21). Astfel obținem

(4) $$E = \frac{M}{2}(\dot{\xi}_1^{0^2} + \dot{\xi}_2^{0^2}) + \frac{1}{8}MR^2\left[(1+\cos^2\theta)\dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}^2 + \right.$$
$$\left. + (1+4\cos^2\theta)\dot{\theta}^2 + 4\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta\right] .$$

In cazul de față există o funcție de forțe și are forma

(5) $$U = -MgR\sin\theta .$$

Pe de altă parte, din compararea relațiilor (3) cu (18.20), presupunînd numerotate coordonatele generalizate în ordinea ξ_1^0, ξ_2^0, ψ, φ și θ , deducem $\ell = 2$ și

(6) $$\begin{cases} A_{11}=1, A_{13}=R\cos\psi\cos\theta , A_{14}=R\cos\psi , A_{15}=-R\sin\psi\sin\theta , A_{12}=B_1=0, \\ A_{12}=1, A_{23}=R\sin\psi\cos\theta , A_{24}=R\sin\psi , A_{25}=R\cos\psi\sin\theta , A_{21}=B_2=0. \end{cases}$$

Se găsesc ecuațiile

(7) $$\begin{cases} \ddot{\xi}_1^0 = \lambda_1 , \quad \ddot{\xi}_2^0 = \lambda_2 , \\ \frac{d}{dt}\left[\dot{\psi}\sin^2\theta + 2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta\right] = \frac{4}{R}(\lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\psi)\cos\theta , \\ \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = \frac{2}{R}(\lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\psi) . \end{cases}$$

In sistemul (7) nu am inclus ecuaţia relativă la variabila θ, deoarece putem înlocui aceeă ecuaţie prin integrala energiei

(8) $$E = -MgR\sin\theta + h \ , \quad h = \text{const.}$$

După ce am scris ecuaţiile (7) şi (8) le putem transforma cu ajutorul relaţiile (1). Mai întîi, facem observaţia că din (1),$(7)_1$, şi $(7)_2$ rezultă

(9) $$\frac{1}{R}(\lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\psi) = \dot\theta\dot\psi\sin\theta - \frac{d}{dt}(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) \ .$$

Din egalităţile $(7)_3$,$(7)_4$ şi (9), după unele transformări simple, obţinem

(10) $$\frac{d\dot\psi}{dt}\sin\theta = 2\dot\varphi\dot\theta \ , \ \frac{d}{dt}(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = \frac{2}{3}\dot\psi\dot\theta\sin\theta \ ,$$

sau

(10') $$\frac{d\dot\psi}{d\theta}\sin\theta = 2\dot\varphi \ , \ \frac{d}{d\theta}(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = \frac{2}{3}\dot\psi\sin\theta \ .$$

Dacă eliminăm pe $\dot\varphi$ din ecuaţiile (10') deducem

(11) $$\frac{d^2\dot\psi}{d\theta^2} + 3\frac{d\dot\psi}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta - \frac{10}{3}\dot\psi = 0 \ .$$

Punînd $\cos^2\theta = u$, relaţia (11) devine

(12) $$u(1-u)\frac{d^2\dot\psi}{du^2} + (\frac{1}{2} - \frac{5}{2}u)\frac{d\dot\psi}{du} - \frac{5}{6}\dot\psi = 0 \ .$$

Această ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea este de un tip cunoscut şi anume ea este ecuaţia diferenţială hipergeometrică a lui Gauss, pentru $\alpha+\beta = \frac{3}{2}$, $\alpha\beta = \frac{5}{6}$ şi $\gamma = \frac{1}{2}$. Se ştie că ecuaţia lui Gauss

(13) $$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \ ,$$

are integrala generală de forma

(14) $$y = AF(\alpha,\beta,\gamma;x) + Bx^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma;x) \ ,$$

în care A şi B sînt constante, iar $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ este seria hipergeometrică a lui Gauss

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) =$$

(15) $$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n \ , |x|<1 \ .$$

Rezultă că expresia lui $\dot{\psi}$ este

(16) $\dot{\psi} = AF(\alpha, \beta, \frac{1}{2}; \cos^2\theta) + B\cos\theta F(\alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \cos^2\theta)$,

unde $\alpha+\beta = \frac{3}{2}$ și $\alpha\beta = \frac{5}{6}$.

Ecuațiile $(10')_1$ și (16) ne arată că $\dot{\varphi}$ se exprimă în funcție de θ prin serii hipergeometrice.

In sfîrșit, relațiile (3),(4) și (8) conduc la

(17) $(1+5\cos^2\theta)\dot{\psi}^2+6\dot{\varphi}^2+5\dot{\theta}^2+12\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta = \frac{8g}{R}(C-\sin\theta), C = \frac{h}{MgR^2}$.

Ecuația (17) dă pe t în funcție de θ printr-o cuadratură. Parametrii ψ, φ, ξ_1^0 și ξ_2^0 se pot afla în funcție de θ tot prin cuadraturi.

Observații. 1^0 Pentru integrarea ecuației (11) putem utiliza, de asemenea, schimbarea de variabilă independentă $\cos\theta = \pm(1-2s)$. Astfel, ecuația (11) devine

(18) $s(1-s)\frac{d^2\dot{\psi}}{ds^2} + (2-4s)\frac{d\dot{\psi}}{ds} - \frac{10}{3}\dot{\psi} = 0$.

Relația (18) se identifică cu ecuația hipergeometrică punînd

$$\gamma' = 2, \quad \alpha'+\beta' = 3, \quad \alpha'\beta' = \frac{10}{3}.$$

Integrala generală a ecuației (18) se obține sub una din formele

(19) $\dot{\psi} = A_1F(\alpha', \beta', 2; \sin^2\frac{\theta}{2}) + \frac{B_1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} F(\alpha'-1, \beta'-1, 0; \sin^2\frac{\theta}{2})$,

sau

(20) $\dot{\psi} = A_2F(\alpha', \beta', 2; \cos^2\frac{\theta}{2}) + \frac{B_2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} F(\alpha'-1, \beta'-1, 0; \cos^2\frac{\theta}{2})$,

A_1, A_2, B_1 și B_2 fiind constante, iar $\alpha'+\beta' = 3$, $\alpha'\beta' = \frac{10}{3}$.

Soluțiile (19) și (20) sînt avantajoase în cazurile particulare în care θ tinde la 0 sau π. In timpul mișcării $\dot{\psi}$ trebuie să rămînă finit, căci în caz contrar energia cinetică devine infinită. Rezultă că θ poate tinde la zero numai dacă

$B_1 = A_2 = 0$ şi că θ poate tinde la π numai atunci cînd avem $A_1 = B_2 = 0$.

2^0 Putem încă integra ecuaţia (11) cu ajutorul substituţiei $\sin^2\theta = u$. Se găseşte ecuaţia lui Gauss pentru $\alpha+\beta = \frac{3}{2}$, $\alpha\beta = \frac{5}{6}$ şi $\gamma' = 2$, iar soluţia corespunzătoare are forma

$$(21)\quad \psi = A'F(\alpha, \beta, 2; \sin^2\theta) + \frac{B'}{\sin^2\theta}F(\alpha-1, \beta-1, 0; \sin^2\theta),$$

A' şi B' fiind constante.

$B_1 = A_2 = 0$ şi că θ poate tinde la π numai atunci cînd avem $A_1 = B_2 = 0$.

2^0 Putem încă integra ecuaţia (11) cu ajutorul substituţiei $\sin^2\theta = u$. Se găseşte ecuaţia lui Gauss pentru $\alpha+\beta = \frac{3}{2}$, $\alpha\beta = \frac{5}{6}$ şi $\gamma' = 2$, iar soluţia corespunzătoare are forma

$$(21)\quad \dot{\psi} = A'F(\alpha, \beta, 2; \sin^2\theta) + \frac{B'}{\sin^2\theta}F(\alpha-1, \beta-1, 0; \sin^2\theta),$$

A' şi B' fiind constante.

Capitolul XIX

ECUAȚIILE LUI HAMILTON

Considerăm un sistem mecanic a cărui poziție depinde de n coordonate q^i. O transformare, datorată lui Poisson și Hamilton, permite să scriem ecuațiile de mișcare ale sistemului sub o formă elegantă, numită canonică.

Descompunem forțele date în două părți, dintre care o parte derivă din potențialul $U(q^1,\dots,q^m,t)$, iar forțele rămase sînt nepotențiale și au componentele generalizate Q_i^*. Astfel, avem

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q^i} + Q_i^* , \quad i=\overline{1,n} . \tag{19.1}$$

Forțele nepotențiale se numesc giroscopice dacă puterea lor este nulă

$$Q_i^* \dot{q}^i = 0 \tag{19.2}$$

și disipative, dacă puterea lor este nepozitivă

$$Q_i^* \dot{q}^i \leq 0 . \tag{19.3}$$

Introducem, după Poisson, necunoscutele auxiliare

$$p_i = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} , \quad i=\overline{1,n} , \tag{19.4}$$

funcția lui Lagrange L fiind definită prin egalitatea (18.12).

In general, putem rezolva sistemul (19.1), liniar în $\dot{q}^i$ și avem

$$\dot{q}^i = f^i(q,p,t) , \quad i=\overline{1,n}, \tag{19.5}$$

unde am notat $q = (q^1,\dots,q^n)$ şi $p=(p_1,\dots,p_n)$. Variabilele lui Poisson $p_1,\dots,p_n$ se numesc impulsuri generalizate, variabilele q^i şi p_i de acelaşi indice se zic conjugate, iar $q^1,\dots,q^n$, $p_1,\dots,p_n$ se numesc variabile canonice.

Definim funcţia lui Hamilton prin relaţia

(19.6) $$H(q,p,t) = p_i\dot{q}^i - L = E_2 - E_0 - U_1 .$$

Ecuaţiile lui Lagrange (18.8), care descriu mişcarea unui sistem mecanic olonom cu n grade de libertate, sînt echivalente cu ecuaţiile lui Hamilton generalizate

(19.7) $$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + Q_i^* , \quad i=\overline{1,n} .$$

In cazul unui sistem mecanic neolonom, ecuaţiile lui Lagrange (18.21) conduc la sistemul hamiltonian generalizat

(19.8) $$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + Q_i^* + \lambda_\alpha A_{\alpha i} , \quad i=\overline{1,n}, \ \alpha = \overline{1,\ell} ,$$

la care trebuie să adăugăm ecuaţiile (18.20).

In continuare presupunem că sistemul mecanic este olonom, iar forţele date sînt potenţiale, deci avem $Q_i^* = 0$, $i=\overline{1,n}$. Ecuaţiile (19.7) se reduc la sistemul lui Hamilton sau ecuaţiile canonice ale mecanicii

(19.9) $$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} , \quad i=\overline{1,n} .$$

Aceste ecuaţii sînt echivalente cu ecuaţiile lui Lagrange (18.11).

Dacă există un potenţial generalizat al forţelor date, adică există o funcţie $U(q,\dot{q},t)$ astfel încît să avem

(19.10) $$Q_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{\partial U}{\partial q^i} , \quad i=\overline{1,n} ,$$

atunci ecuaţiile canonice corespunzătoare sînt tot de forma (19.9), însă în funcţia lui Hamilton, în locul potenţialului obişnuit, intră potenţialul generalizat al forţelor date.

Sistemul lui Hamilton reprezintă un sistem de 2n ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, cu funcţiile necunoscute $q^i(t)$ şi $p_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. Pentru aflarea mişcării unui sistem material dat, la sistemul lui Hamilton trebuie să adăugăm condiţiile iniţiale (18.9), sau condiţiile echivalente

$$q^i(t_0) = q_0^i,\ p_i(t_0) = p_i^0,\ i=\overline{1,n}\ . \tag{19.11}$$

Cele 2n variabile canonice q şi p pot fi interpretate drept coordonate carteziene ale unui punct într-un spaţiu euclidian cu 2n dimensiuni Φ_{2n}, numit spaţiul fazelor (Gibbs).

Sistemul hamiltonian (19.9) poate fi scris în forma matricială

$$\dot{x} = AH_x\ , \tag{19.12}$$

unde x este vectorul coloană de componente $q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n$, vectorul coloană H_x are componentele $\frac{\partial H}{\partial q^1},\dots,\frac{\partial H}{\partial q^n},\frac{\partial H}{\partial p_1},\dots,\frac{\partial H}{\partial p_n}$, iar A este matricea pătrată de ordinul 2n.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\ , \tag{19.13}$$

I_n fiind matricea unitate de ordinul n.

De asemenea, ecuaţiile lui Hamilton (19.9) pot fi scrise în formă simetrică cu ajutorul parantezelor lui Poisson. Fiind date funcţiile $\varphi(q,p,t)$ şi $\psi(q,p,t)$, de clasă C^2 într-un domeniu din spaţiul fazelor Φ_{2n}, pentru $t\in[t_0,t_1]$, se numeşte paranteză a lui Poisson a lor suma a n determinanţi funcţionali

$$(\varphi,\psi) = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(q^i,p_i)}\ . \tag{19.14}$$

Spunem că două funcţii sînt în involuţie dacă paranteza Poisson a lor este identic nulă. Un sistem de funcţii, care depind de variabilele q şi p, sînt în involuţie dacă paranteza

Poisson a două funcţii oarecare este identic nulă.

Forma sistemului (19.9), pe care o avem în vedere, este

(19.15) $$\dot{q}^i = (q^i, H),\ \dot{p}_i = (p_i, H)\ ,\ i=\overline{1,n}\ .$$

Considerăm transformarea de coordonate în spaţiul fazelor (în cazul general conţinînd pe t ca parametru)

(19.16) $$\begin{cases} \tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^j, p_j, t),\ \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q^j, p_j, t),\ i,j=\overline{1,n}, \\ \Delta = \dfrac{\partial(\tilde{q}^1, \ldots, \tilde{q}^n, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n)}{\partial(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)} \neq 0\ , \end{cases}$$

funcţiile $\tilde{q}(q,p,t)$ şi $\tilde{p}(q,p,t)$ fiind de clasă C^2 în domeniul de definiţie.

Transformarea (19.16) se numeşte canonică dacă transformă orice sistem hamiltonian tot într-un sistem hamiltonian în noile variabile $\tilde{q},\tilde{p}$, în general cu o nouă funcţie a lui Hamilton $\tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p},t)$.

Transformările canonice sînt caracterizate de

Teorema 1. Pentru ca transformarea (19.16) să fie canonică este necesar şi suficient să existe o funcţie $V(q,p,t)$ şi o constantă $c \neq 0$, astfel încît relaţia

(19.17) $$\tilde{p}_i d\tilde{q}^i - \tilde{H}dt = c(p_i dq^i - Hdt) - dV\ ,$$

să fie verificată identic în virtutea transformării (19.16).

Funcţia $V(q,p,t)$, de clasă C^2 şi constanta c se numesc, respectiv, funcţia generatoare şi valenţa transformării canonice (19.16). In cazul $c=1$ transformarea canonică se numeşte univalentă.

Putem caracteriza transformările canonice cu ajutorul parantezelor lui Lagrange. Fiind date $2n$ funcţii φ_i, ψ_i, $i=\overline{1,n}$, de două variabile q şi p, paranteza lui Lagrange a celor $2n$ funcţii este suma a n determinanţi funcţionali

(19.18) $$[q,p] = \frac{\partial(\varphi_i, \psi_i)}{\partial(q,p)} .$$

Teorema 2. Transformarea (19.16) este canonică dacă şi numai dacă au loc relaţiile

(19.19) $[q^i,q^j]=0, [p_i,p_j]=0, [q^i,p_j]=c\delta^j_i$, $i,j=\overline{1,n}$,

pentru orice valoare a parametrului t, c fiind valenţa transformării.

O a treia caracterizare a transformărilor canonice se exprimă prin intermediul matricii iacobiene M a transformării (19.16). Matricea M se numeşte matrice simplectică generalizată dacă satisface una dintre următoarele patru condiţii echivalente între ele

(19.20) $MAM'=cA$, $M'AM=cA$, $M^{-1}A(M')^{-1}=\frac{1}{c}A$, $(M')^{-1}AM^{-1}=\frac{1}{c}A$,

unde M' şi M^{-1} sînt, respectiv, transpusa şi inversa matricii M, matricea A este de forma (19.13), iar c este valenţa transformării. In cazul transformării univalente matricea M se numeşte simplectică.

Teorema 3. Pentru ca transformarea (19.16) să fie canonică este necesar şi suficient ca matricea iacobiană corespunzătoare să fie simplectică generalizată cu valenţa constantă c .

Din (19.20) rezultă

(19.21) $$\frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial q^j} = c\frac{\partial p_j}{\partial\tilde{p}_i}, \frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial p_j} = -c\frac{\partial q^j}{\partial\tilde{p}_i}, \frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial q^j} =$$

$$= -c\frac{\partial p_j}{\partial\tilde{q}^i}, \frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial p_j} = c\frac{\partial q^j}{\partial\tilde{q}^i} .$$

De asemenea, utilizînd parantezele lui Poisson avem

Teorema 4. Condiţia necesară şi suficientă de canonicitate a transformării (19.16) este ca egalităţile

(19.22) $(\tilde{q}^i,\tilde{q}^j)=0$, $(\tilde{p}_i,\tilde{p}_j)=0$, $(\tilde{q}^i,\tilde{p}^j)=c\,\delta^i_j$, $i,j=\overline{1,n}$,

să fie verificate identic pentru orice t fixat, c=const.≠ 0.

Dacă în spaţiul fazelor efectuăm succesiv două transformări canonice, atunci transformarea obţinută este tot canonică. Inversa unei transformări canonice este canonică şi transformarea identică este canonică, prin urmare, mulţimea transformărilor canonice consituie un grup.

Transformările canonice care satisfac inegalitatea

$$\frac{\partial(\tilde{q}^1,\dots,\tilde{q}^n)}{\partial(p_1,\dots,p_n)} \neq 0 , \tag{19.23}$$

se numesc transformări canonice libere. In acest caz cantităţile $q^i,\tilde{q}^i$ şi t sînt independente şi pot fi luate ca noi variabile. Punînd

$$V(q,p,t) = S(q,\tilde{q},t) , \tag{19.24}$$

din (19.17) deducem

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = cp_i , \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}^i} = -\tilde{p}_i , \quad i=\overline{1,n} , \tag{19.25}$$

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t} . \tag{19.26}$$

Funcţia generatoare a unei transformări canonice libere satisface condiţia

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial \tilde{q}^j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0 . \tag{19.27}$$

Ecuaţiile (19.25) definesc transformarea canonică liberă cu funcţia generatoare dată $S(q,\tilde{q},t)$ şi cu valenţa dată $c\neq 0$. Relaţia (19.26) stabileşte o legătură simplă între funcţiile lui Hamilton H şi $\tilde{H}$. Dacă $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, atunci formulele (19.16) nu conţin explicit pe t. Astfel, pentru a obţine un sistem canonic cu o funcţie a lui Hamilton mai simplă, este necesar să facem o transformare canonică liberă, care conţine pe t ca parametru.

Transformările canonice care nu satisfac condiţia (19.23) se numesc transformări canonice supuse la legături. In acest caz cantităţile $q^i, \tilde{q}^i$ şi t verifică un număr de $N < n$ relaţii. Acest caz nu îl considerăm aici.

Integrarea ecuaţiilor lui Hamilton se simplifică în cazul cînd există un număr de integrale prime ale lor. Prin integrală primă a sistemului canonic înţelegem atît relaţia $f(q,p,t) = const.$, verificată identic în baza sistemului, cît şi funcţia $f(q,p,t)$ care păstrează o valoare constantă pentru orice mişcare a sistemului dat (constanta se poate schimba de la o mişcare la alta).

Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul lui Hamilton (19.9) să admită integrala primă $f(q,p,t)$ este ca egalitatea

(19.28) $$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,H) = 0 ,$$

să fie verificată identic în virtutea sistemului (19.9).

Dacă funcţia H nu depinde explicit de t, atunci ecuaţiile (19.9) admit integrala primă a lui Jacobi (18.18), adică

(19.29) $$H(q,p) = h , \quad h = const.$$

In acest caz spunem că avem un sistem mecanic conservativ generalizat, funcţia H se numeşte energia totală generalizată, iar integrala primă a lui Jacobi se numeşte, încă, integrala generalizată a energiei.

Dacă $f(q,p,t)$ este o integrală primă a ecuaţiilor canonice (19.9) şi H nu depinde explicit de t, atunci $\frac{\partial f}{\partial t}$ este o integrală primă a acestor ecuaţii.

Teorema lui Poisson. Dacă f_1 şi f_2 sînt integrale prime ale ecuaţiilor (19.9), atunci şi (f_1,f_2) este o integrală primă a acestor ecuaţii.

In cazul cînd H nu depinde explicit de t, integrarea

sistemului hamiltonian (19.9) de ordinul 2n se poate reduce la integrarea unui sistem canonic de ordinul 2(n-1) şi la o cuadratură.

De exemplu, dacă $\frac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0$, punînd $p_n = -\mathcal{K}(q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_{n-1},h)$, avem

$$(19.30)\quad \frac{dq^\alpha}{dq^n} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dq^n} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q^\alpha}, \quad dt = dq^n / \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \alpha = \overline{1,n-1}.$$

Ecuaţiile canonice (19.30) se numesc ecuaţiile lui Whittaker.

Dacă sistemul canonic (19.9) de ordinul 2n conţine m variabile ciclice, atunci integrarea lui se poate reduce la aceea a unui sistem canonic de ordinul 2(n-m) şi la m cuadraturi.

Astfel, în cazul $H = H(q^1,\dots,q^{n-m},p_1,\dots,p_n,t)$, avem $p_\gamma = c_\gamma = \text{const.}$ şi

$$(19.31)\quad \dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \quad dq^\gamma = \frac{\partial H}{\partial c_\gamma}\,dt, \quad \alpha = \overline{1,n-m};$$
$$n-m+1 \leqslant \gamma \leqslant n.$$

Aceste două cazuri de reducere a ordinului sistemului canonic, sînt incluse în următoarea teoremă fundamentală a teoriei sistemelor canonice.

<u>Teorema lui Sophus Lie.</u> Dacă sistemul (19.9) de ordinul 2n are m integrale prime în involuţie şi rezolvabile în raport cu m dintre variabilele p, $m \leqslant n$, atunci integrarea lui se reduce la integrarea unui sistem canonic de ordinul 2(n-m) şi la m cuadraturi.

In particular, pentru m=n , avem

<u>Teorema lui Liouville.</u> Dacă sistemul (19.9) de ordinul 2n are n integrale prime în involuţie şi rezolvabile în raport cu variabilele p, atunci integrarea lui se reduce la cuadraturi.

Pentru integrarea efectivă a unui sistem canonic se poate

utiliza metoda clasică a lui Hamilton-Jacobi. Această metodă constă în reducerea integrării unui sistem hamiltonian de ordinul 2n, la găsirea unei integrale complete a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi, cu n+1 variabile independente. Ecuaţia cu derivate parţiale în chestiune este ecuaţia lui Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 , \tag{19.32}$$

care rezultă nemijlocit din teoria transformărilor canonice.

O integrală completă a ecuaţiei cu derivate parţiale (19.32), este o soluţie $S(q^i, a^i, t)$ a acestei ecuaţii, care conţine n constante a^i (poate conţine încă o constantă aditivă) şi satisface condiţia

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0 . \tag{19.33}$$

Metoda lui Hamilton-Jacobi de integrare a sistemului (19.9) decurge din

Teorema lui Hamilton-Jacobi. Dacă $S(q^i, a^i, t)$ este o integrală completă a ecuaţiei lui Hamilton-Jacobi (19.32), atunci integrala generală a ecuaţiilor hamiltoniene (19.9) este dată de relaţiile

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i , \quad \frac{\partial S}{\partial a^i} = b_i , \quad i=\overline{1,n} , \tag{19.34}$$

unde a^i şi b^i sînt constante arbitrare.

Prezentăm cîteva cazuri întîlnite frecvent în aplicaţii.

1° Dacă sistemul canonic (19.9) are integrala primă (19.29), căutăm o integrală completă a ecuaţiei (19.32) sub forma

$$S = -ht + W(q^1, \ldots, q^n, a^1, \ldots, a^{n-1}, h) , \tag{19.35}$$

$a^1, \ldots, a^{n-1}$ şi h fiind constante arbitrare.

Integrala generală a sistemului canonic este dată de

(19.36) $\frac{\partial W}{\partial q^i} = p_i$, $\frac{\partial W}{\partial a^\alpha} = b_\alpha$, $\frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0$, $i=\overline{1,n}$; $\alpha=\overline{1,n-1}$,

în care a^α, b_α, $\alpha=\overline{1,n-1}$, h şi t_0 sînt constante arbitrare.

2° Presupunem în plus că variabilele $q^{m+1},\dots,q^n$ sînt ciclice. In acest caz căutăm o integrală completă a ecuaţiei (19.32) de forma

(19.37) $S = -ht + a^{m+1}q^{m+1} + \dots + a^n q^n + W(q^1,\dots,q^m,h,a^2,\dots,a^n)$,

unde funcţia W se determină din ecuaţia

(19.38) $H(q^1,\dots,q^m,\frac{\partial W}{\partial q^1},\dots,\frac{\partial W}{\partial q^m},a^{m+1},\dots,a^n) = h$,

$a^2,\dots,a^n$ şi h fiind constante arbitrare.

3° <u>Cazul lui Liouville</u>. Acesta este un caz de separare a variabilelor în care ecuaţiile de mişcare se integrează prin cuadraturi. Presupunem că sistemul mecanic este scleronom şi conservativ , iar energia cinetică şi potenţialul forţelor date au expresiile

(19.39) $T = \frac{1}{2}\sum_1^n A_i(q^i)\sum_1^n B_j(q^j)(\dot{q}^j)^2$, $U = \frac{\sum_1^n U_i(q_i)}{\sum_1^n A_i(q^i)}$,

unde funcţiile considerate depind numai de argumentele indicate.

Se caută o integrală completă a ecuaţiei lui Hamilton-Jacobi de forma

(19.40) $S = -ht + W_1(q^1,a^1,h) + \dots + W_n(q^n,a^n,h)$, $\sum_1^n a^i = 0$,

$a^1,\dots,a^n$ şi h fiind constante arbitrare,

<u>356</u>. Să se arate că într-o precesie regulată a unui rigid cu un punct fix O, a cărui elipsoid de inerţie relativ la punctul fix este de rotaţie, forţele date sînt giroscopice.

<u>Rezolvare</u>. Luăm reperul $Ox_1x_2x_3$ solidar cu rigidul, format

din axe principale de inerţie relative la punctul fix, Ox_3 fiind axa de rotaţie a elipsoidului de inerţie. Presupunem că solidul se roteşte uniform în jurul axei Ox_3, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_r$, iar axa Ox_3 la rîndul său, execută o mişcare de rotaţie uniformă în jurul axei fixe $O\xi_3$, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_p$. Vectorul $\bar{\omega}_r$ este viteza unghiulară a rotaţiei proprii şi $\bar{\omega}_p$ este viteza unghiulară a mişcării de precesie.

Cu notaţiile de la problema 89, avem

(1) $$\bar{\omega}_r = \mu \bar{e}_3 , \quad \bar{\omega}_p = \nu \bar{\varepsilon}_3 , \quad \theta = \gamma ,$$

μ, ν şi γ fiind constante.

Forţele care acţionează asupra rigidului se numesc giroscopice dacă puterea lor este nulă (v. relaţia (19.2)). Din formula (14.9) deducem

(2) $$\mathcal{P} = \bar{\omega} \bar{\mathcal{M}} .$$

In cazul de faţă vectorul $\bar{\omega}$ are expresia

(3) $$\bar{\omega} = \bar{\omega}_p + \bar{\omega}_r ,$$

iar componentele sale faţă de axele mobile sînt date de formulele (6) de la problema citată mai sus.

Momentul rezultant în raport cu punctul O al forţelor date se determină din teorema momentului cinetic (13.10). Deoarece

(4) $$\bar{\mathcal{K}} = I_{11}(\omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2) + I_{33}\omega_3 \bar{e}_3 ,$$

rezultă

$$\dot{\bar{\mathcal{K}}} = \left[I_{33}\mu + (I_{33} - I_{11})\nu \cos\gamma\right](\bar{e}_1 \cos\mu t - \bar{e}_2 \sin\mu t)\nu \sin\gamma ,$$

prin urmare (v. expresiile (2.19))

(5) $$\bar{\mathcal{M}} = \left[I_{33} + (I_{33} - I_{11})\frac{\nu}{\mu}\cos\gamma\right](\bar{\omega}_p \times \bar{\omega}_r) .$$

Din (3) şi (5) obţinem imediat $\bar{\omega}\bar{\mathcal{M}} = 0$. Momentul $\bar{\mathcal{M}}$ dat de (5) se numeşte moment giroscopic. Astfel, forţele al căror moment este giroscopic, sînt giroscopice (de aici provine

şi denumirea de forţe giroscopice). Deoarece fracţia $\frac{\nu}{\mu}$ este, în general, foarte mică, pentru momentul (cuplul) giroscopic se utilizează formula aproximativă

(6) $$\overline{\mathcal{M}} = I_{33}(\bar{\omega}_p \times \bar{\omega}_r) .$$

Observaţie. Egalitatea $\bar{\omega}\overline{\mathcal{M}} = 0$ poate fi dedusă şi din ecuaţia (14.15).

357. Să se arate că potenţialul generalizat $U(q,\dot{q},t)$ depinde liniar de vitezele generalizate $\dot{q}^i$.

Rezolvare. In mecanică se presupune că forţele generalizate Q_i depind, în general, de coordonatele generalizate q^i, de vitezele generalizate $\dot{q}^i$ şi de timpul t, însă nu depind explicit de acceleraţiile generalizate $\ddot{q}^i$, deci

(1) $$Q_i = Q_i(q^j,\dot{q}^j,t),\ i,j=\overline{1,n} .$$

Pe de altă parte, formulele (19.10) sînt echivalente cu

(2) $$Q_i = -\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \dot{q}^i} + \frac{\partial U}{\partial q^i},$$

$$i,j=\overline{1,n} .$$

Din compararea relaţiilor (1) şi (2) rezultă că toate derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $U(q,\dot{q},t)$ în raport cu vitezele generalizate trebuie să fie identic nule, adică avem

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0 , \quad i,j = \overline{1,n} .$$

Aşadar, potenţialul generalizat este o funcţie liniară de vitezele generalizate de forma

(3) $$U = U_1\dot{q}^i + U_0 ,$$

unde U_i, $i=\overline{1,n}$ şi U_0 sînt funcţii de coordonatele generalizate şi de timp.

Inlocuind pe U din (3) în (2) găsim

(4) $$Q_i = \left(\frac{\partial U_j}{\partial q^i} - \frac{\partial U_i}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j - \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_0}{\partial q^i}, \quad i,j=\overline{1,n}.$$

In particular, dacă partea liniară $U_i\dot{q}^i$ a potențialului generalizat nu depinde explicit de $t\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} = 0, i=\overline{1,n}\right)$, forțele generalizate Q_i se compun din forțele potențiale $\frac{\partial U_0}{\partial q^i}$, $i=\overline{1,n}$ și forțele giroscopice

(5) $$Q_i^* = \left(\frac{\partial U_j}{\partial q^i} - \frac{\partial U_i}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j .$$

358. Să se arate că în cazul mișcării electronului într-un cîmp electromagnetic există un potențial generalizat al forței date.

Rezolvare. Mișcarea electronului într-un cîmp electromagnetic se face sub acțiunea forței lui Lorentz

(1) $$\bar{F} = e\left[\bar{E} + \frac{\bar{v}}{c} \times \bar{H}\right],$$

unde e reprezintă sarcina electronului, $\bar{v}$ este viteza sa, c este mărimea vitezei luminii considerată constantă, iar $\bar{E}$ și $\bar{H}$ sînt intensitățile cîmpului electric și magnetic. Vectorii $\bar{E}$ și $\bar{H}$ se exprimă prin potențialul scalar φ și vectorial $\bar{A}$ cu ajutorul formulelor

(2) $$\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \quad \bar{H} = \operatorname{rot}\bar{A}.$$

Rezultă că forța lui Lorentz are expresia

(3) $$\bar{F} = -e\operatorname{grad}\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}(\bar{v} \times \operatorname{rot}\bar{A}).$$

Luăm drept coordonate generalizate ale particulei coordonatele carteziene x_i ale sale în spațiul euclidian cu trei dimensiuni. Potențialii φ și $\bar{A}$ depind de x_i și t. Deoarece

(4) $$\bar{v} \times \operatorname{rot}\bar{A} = \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)\dot{x}_j\bar{e}_i ,$$

egalitatea (3) conduce la

$$(5)\qquad F_i = -e\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{e}{c}\frac{A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j,\quad i,j=\overline{1,3}.$$

Cum

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(A_j\dot{x}_j)\right],$$

relaţia (5) devine

$$(6)\qquad F_i = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(-e\varphi + \frac{e}{c}A_j\dot{x}_j)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}(-e\varphi + \frac{e}{c}A_j\dot{x}_j),\quad i,j=\overline{1,3}.$$

Prin urmare, forţa lui Lorentz admite potenţialul generalizat

$$(7)\qquad U = -e\varphi + \frac{e}{c}\bar{v}\bar{A}\ .$$

Observaţie. Acţiunea pe care o exercită un cîmp magnetic asupra unui electron reprezintă o forţă giroscopică.

359. Fiecare particulă a unui sistem mecanic olonom şi scleronom, cu n grade de libertate, întîmpină o rezistenţă proporţională cu viteza respectivă. Să se arate că aceste forţe sînt disipative.

Rezolvare. Fie q^i, $i=\overline{1,n}$, coordonatele generalizate ale sistemului. Vectorul de poziţie al unui punct oarecare al sistemului este de forma

$$(1)\qquad \bar{r} = \bar{r}(q^1,\ldots,q^n)\ .$$

In cazul de faţă forţa specifică de masă este coliniară şi de sens contrar cu viteza particulei, iar mărimea sa este proporţională cu mărimea vitezei respective, deci avem

$$(2)\qquad \bar{F} = -k(\bar{r})\bar{v}\ ,\ k>0\ .$$

Astfel, forţele generalizate au expresiile

$$(3)\qquad Q_i^* = -\int_D k(\bar{r})\bar{v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^i}\,dm\ ,\ i=\overline{1,n}\ .$$

Deoarece

$$(4)\qquad \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial\dot{q}^i}\ ,\quad i=\overline{1,n}\ ,$$

putem scrie

$$(5) \qquad Q_i^* = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(-\frac{1}{2}\int_D k(\bar{r})\bar{v}^2 dm\right), \quad i=\overline{1,n}.$$

Introducem funcţia de disipaţie a lui Rayleigh

$$(6) \qquad R = \frac{1}{2}\int_D k(\bar{r})\bar{v}^2 dm = \frac{1}{2} a_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j ,$$

în care am notat

$$(7) \qquad a_{ij} = a_{ji} = \int_D k(\bar{r})\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^j} dm .$$

Funcţia disipativă a lui Rayleigh, care este analogă cu energia cinetică a unui sistem material scleronom, este o formă pătratică în $\dot{q}^i$, pozitiv definită pentru orice q^i din mulţimea de definiţie.

Forţele generalizate Q_i^* se obţin din funcţia de disipaţie a lui Rayleigh cu ajutorul formulei

$$(8) \qquad Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Din relaţiile (6) şi (8) rezultă

$$(9) \qquad Q_i^*\dot{q}^i = -2R ,$$

deci forţele de rezistenţă considerate sînt disipative.

Pentru a da o interpretare fizică funcţiei lui Rayleigh, să calculăm derivata în raport cu timpul a energiei totale a sistemului.

Considerăm cazul mai general cînd asupra sistemului scleronom dat, pe lîngă forţele nepotenţiale ale căror componente generalizate sînt Q_i^*, acţionează şi alte forţe care derivă din potenţialul $U(q^1,\ldots,q^n)$. Energia totală a acestui sistem este

$$(10) \qquad H(q,p) = E_2(q,\dot{q}) - U(q) .$$

In virtutea ecuaţiilor lui Hamilton (19.7) deducem

$$(11) \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = Q_i^*\dot{q}^i ,$$

aşadar, derivata în raport cu t a energiei totale este egală cu

putem scrie

$$(5) \qquad Q_i^* = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(-\frac{1}{2}\int_D k(\bar{r})\bar{v}^2 dm\right), \quad i=\overline{1,n}.$$

Introducem funcţia de disipaţie a lui Rayleigh

$$(6) \qquad R = \frac{1}{2}\int_D k(\bar{r})\bar{v}^2 dm = \frac{1}{2} c_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j ,$$

în care am notat

$$(7) \qquad c_{ij} = c_{ji} = \int_D k(\bar{r})\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q^j} dm .$$

Funcţia disipativă a lui Rayleigh, care este analogă cu energia cinetică a unui sistem material scleronom, este o formă pătratică în $\dot{q}^i$, pozitiv definită pentru orice q^i din mulţimea de definiţie.

Forţele generalizate Q_i^* se obţin din funcţia de disipaţie a lui Rayleigh cu ajutorul formulei

$$(8) \qquad Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Din relaţiile (6) şi (8) rezultă

$$(9) \qquad Q_i^*\dot{q}^i = -2R ,$$

deci forţele de rezistenţă considerate sînt disipative.

Pentru a da o interpretare fizică funcţiei lui Rayleigh, să calculăm derivata în raport cu timpul a energiei totale a sistemului.

Considerăm cazul mai general cînd asupra sistemului scleronom dat, pe lîngă forţele nepotenţiale ale căror componente generalizate sînt Q_i^*, acţionează şi alte forţe care derivă din potenţialul $U(q^1,\ldots,q^n)$. Energia totală a acestui sistem este

$$(10) \qquad H(q,p) = E_2(q,\dot{q}) - U(q) .$$

In virtutea ecuaţiilor lui Hamilton (19.7) deducem

$$(11) \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = Q_i^*\dot{q}^i ,$$

aşadar, derivata în raport cu t a energiei totale este egală cu

puterea forţelor nepotenţiale. Prin urmare, dacă forţele nepotenţiale sînt disipative, atunci energia totală este o funcţie necrescătoare de t, ceea ce justifică denumirea de forţe disipative. In acest caz însuşi sistemul mecanic dat se numeşte disipativ.

Ecuaţiile (9) şi (11) conduc la

$$\frac{dH}{dt} = -2R \,, \tag{12}$$

deci, funcţia lui Rayleigh este în fiecare moment egală cu jumătate din viteza de descreştere a energiei totale.

360. Să se arate că următoarele transformări sînt canonice:

1° $\tilde{q}^i = \alpha q^i$, $\tilde{p}_i = \beta p_i$,

2° $\tilde{q}^i = \alpha p_i$, $\tilde{p}_i = \beta q^i$,

3° $\tilde{q}^i = p_i \operatorname{tg} t$, $\tilde{p}_i = q^i \operatorname{ctg} t$,

4° $\tilde{q}^i = q^i/Q$, $\tilde{p}_i = Qp_i - 2Pq^i$, $Q = q^i q^i$, $P = p_i q^i$,

unde $i = \overline{1,n}$, iar α şi β sînt constante diferite de zero.

Rezolvare. Utilizăm condiţia (19.17).

1° Rezultă

$$\tilde{p}_i d\tilde{q}^i = \alpha\beta\, p_i dq^i \,,$$

prin urmare, transformarea dată este canonică şi avem

$$c = \alpha\beta \,, \quad V = 0 \,, \quad \tilde{H} = -\alpha\beta H \,.$$

Această transformare canonică nu este liberă.

2° Deoarece

$$\tilde{p}_i d\tilde{q}^i = \alpha\beta q^i dp_i \,,$$

vedem că avem o transformare canonică liberă pentru care

$$c = -\alpha\beta \,, \quad V = -\alpha\beta\, p_i q^i, \quad S = -\beta\, q^i \tilde{q}^i \,, \quad \tilde{H} = -\alpha\beta H \,.$$

3° Deducem

$$\tilde{p}_i d\tilde{q}^i = q^i\, dp_i + \frac{p_i q^i}{\sin t \cos t} dt \,,$$

deci, în cazul de faţă avem o transformare canonică liberă, cu valenţa $c = -1$, funcţia generatoare

$$V = -p_i q^i \ , \text{ sau } \ S = -q^i \tilde{q}^i \operatorname{ctg} t \ ,$$

iar noua funcţie a lui Hamilton are expresia

$$\tilde{H} = -H + 2\frac{p_i q^i}{\sin 2t} \ , \text{ sau } \ \tilde{H} = -H + \frac{q^i \tilde{q}^i}{\sin^2 t} \ .$$

4° Din ecuaţiile transformării obţinem

$$\tilde{p}_i d\tilde{q}^i = (Qp_i - 2Pq^i)\left(\frac{dq^i}{q} - \frac{2q^i q^j dq^j}{q^2}\right) = p_i dq^i \ ,$$

prin urmare, transformarea dată este o transformare canonică univalentă, care nu este liberă, iar funcţia sa generatoare este egală cu zero.

361. Să se arate că următoarele transformări în planul fazelor (n=1) sînt canonice:

1° $\tilde{q} = \alpha\sqrt{q+a}\cos k(p+b)$, $\tilde{p} = \beta\sqrt{q+a}\sin k(p+b)$,

2° $\tilde{q} = \alpha\sqrt{p+b}\cos k(q+a)$, $\tilde{p} = \beta\sqrt{p+b}\sin k(q+a)$,

3° $\tilde{q} = \alpha e^{kp}\sqrt{q+a}$, $\tilde{p} = \beta e^{-kp}\sqrt{q+a}$,

4° $\tilde{q} = q + pt + \frac{1}{2}gt^2$, $\tilde{p} = p + gt$,

5° $\tilde{q} = q\cos kt + \frac{p}{k}\sin kt$, $\tilde{p} = -kq\sin kt + p\cos kt$,

în care α , β , a, b, g şi k sînt constante şi $\alpha\beta k \neq 0$.

Rezolvare 1°. Ecuaţiile transformării conduc la

$$\tilde{p}d\tilde{q} - cpdq = \left[\frac{\alpha\beta}{4}\sin 2k(\tilde{p}+b) - cp\right]dq - \alpha\beta k(q+a)\sin^2 k(p+b)dp,$$

$c = \text{const.} \neq 0$.

Transformarea dată este canonică dacă şi numai dacă membrul drept al egalităţii precedente este o diferenţială exactă. Rezultă că această transformare este o transformare canonică liberă cu valenţa $c = \frac{1}{2}\alpha\beta k$ şi funcţia generatoare

$$V = \frac{1}{2}\alpha\beta(q+a)\left[kp - \frac{1}{2}\sin 2k(p+b)\right] \ ,$$

sau

$$S = \frac{1}{2}\alpha\beta(q+a)\arccos\frac{\tilde{q}}{\alpha\sqrt{q+a}} - \frac{1}{2}\alpha\beta kb(q+a) - \frac{p\tilde{q}}{2\alpha}\sqrt{\alpha^2(q+a) - \tilde{q}^2}$$

2^0 Avem

$$\tilde{p}d\tilde{q}-cpdq = \frac{\alpha\beta}{4}\sin 2k(q+a)dp-\left[\alpha\beta k(p+b)\sin^2 k(q+a)+cp\right]dq ,$$

$c = \text{const.} \neq 0$,

de unde deducem că transformarea dată este o transformare canonică liberă iar

$$c = -\frac{1}{2}\alpha\beta k , \quad V = \frac{1}{4}\alpha\beta(p+b)\sin 2k(q+a), \quad \tilde{H} = -\frac{1}{2}\alpha\beta kH .$$

Funcţia S are expresia

$$S = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}\tilde{q}^2 \operatorname{tg} k(q+a) .$$

3^0 Obţinem

$$\tilde{p}d\tilde{q} - cpdq = \alpha\beta k(q+a)dp + (\frac{\alpha\beta}{2} - cp)dq, \quad c=\text{const.}\neq 0 ,$$

prin urmare, avem o transformare canonică liberă pentru care

$$c = -\alpha\beta k , \quad V = \frac{\alpha\beta}{2}(q+a)(2kp+1), \quad \tilde{H} = -\alpha\beta kH ,$$

iar funcţia generatoare S are expresia

$$S = \frac{\alpha\beta}{2}(q+a)(1 + \ln\frac{\tilde{q}^2}{\alpha^2(q+a)}) .$$

4^0 Deoarece

$$\tilde{p}d\tilde{q}-cpdq = \frac{\tilde{q}-q}{t}(d\tilde{q}-cdq)+ \frac{1}{2}\operatorname{gt}(d\tilde{q}+cdq), \quad c = \text{const.}\neq 0 ,$$

rezultă că transformarea dată este o transformare canonică liberă univalentă, cu funcţia generatoare

$$S = -\frac{1}{2t}(\tilde{q}-q)^2 - \frac{1}{2}\operatorname{gt}(\tilde{q}+q)$$

şi noua funcţie a lui Hamilton

$$\tilde{H} = H + \frac{1}{2}(\frac{\tilde{q}-q}{t})^2 - \frac{1}{2}g(\tilde{q}+q) .$$

5^0 Ţinînd seama de ecuaţiile transformării găsim

$$\tilde{p}d\tilde{q}-cpdq=k(\tilde{q}d\tilde{q}+cqdq)\operatorname{ctg} kt - \frac{k}{\sin kt}(qd\tilde{q}+c\tilde{q}dq), \quad c=\text{const.}\neq 0.$$

Aşadar, avem o transformare canonică liberă univalentă, cu funcţia generatoare

$$S = -\frac{k}{2}(\tilde{q}^2+q^2)\operatorname{ctg} kt + \frac{kq\tilde{q}}{\sin kt} ,$$

iar noua funcţie a lui Hamilton este dată de formula

$$\tilde{H} = H + \frac{k}{2\sin^2 kt}\left[\tilde{q}^2+q^2-2k\tilde{q}q\cos kt\right] .$$

362. Să se determine condiţiile în care transformările următoare sînt canonice :

1° $\tilde{q} = \alpha q + \beta p$, $\tilde{p} = \alpha' q + \beta' p$,

2° $\tilde{q} = f(q)\cos p$, $\tilde{p} = f(q)\sin p$,

3° $\tilde{q} = e^{kp} f(q)$, $\tilde{p} = e^{-kp} g(q)$,

unde α , β , α', β' şi k sînt constante, iar f şi g funcţii de q .

Rezolvare. 1° Din ecuaţiile transformării deducem

$$\tilde{p}d\tilde{q}-cpdq= \alpha\alpha' qdq+ \beta\beta' pdp+(\alpha\beta'-c)pdq+ \alpha'\beta qdp,\ c=\text{const.}\neq 0.$$

Pentru ca membrul secund al egalităţii precedente să fie o diferenţială exactă este necesar şi suficient să avem

$$c = \alpha\beta' - \alpha'\beta .$$

Prin urmare, dacă $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, transformarea este canonică, are valenţa c egală cu determinantul transformării şi funcţia generatoare

$$V = -\frac{1}{2}(\alpha\alpha' q^2+ \beta\beta' p^2) - \alpha'\beta pq .$$

Această transformare este liberă pentru $\beta \neq 0$.

2° Ecuaţiile transformării dau

$$\tilde{p}d\tilde{q}-cpdq= (\tfrac{1}{2} ff'\sin 2p-cp)dq-f^2\sin^2 pdp ,\ c=\text{const.}\neq 0.$$

Impunînd condiţia ca această expresie să fie o diferenţială exactă găsim

$$ff' = c, \text{ sau } f^2 = 2c(q+a),\quad a = \text{const.},$$

deci, transformarea de care ne ocupăm este de tipul 1° de la problema 361.

3° Deducem

$$\tilde{p}d\tilde{q} - cpdq = (f'g-cp)dq + kfgdp \quad , \quad c = \text{const.} \neq 0 .$$

Procedînd la fel ca la punctele 1° şi 2°, obţinem

$\frac{d}{dq}(fg) = -\frac{c}{k}$, sau $fg = -\frac{c}{k}(q+a)$, a=const., $k \neq 0$.

Prin urmare, transformarea

$$\tilde{q} = e^{kp} f(q), \quad \tilde{p} = -\frac{c(q+a)}{kf(q)} e^{-kp}, \quad k \neq 0, \ a = \text{const.},$$

este o transformare canonică liberă, oricare ar fi funcţia f(q).

In particular, pentru $f = \alpha\sqrt{q+a}$, α= const. transformarea este de tipul 3° de la problema precedentă.

363. Să se arate că următoarea transformare este canonică:

$$(1) \quad \begin{cases} \tilde{q}^1 = q^1 \cos q^2, \ \tilde{q}^2 = q^1 \sin q^2, \\ \tilde{p}_1 = p_1 \cos q^2 - \frac{p_2}{q^1} \sin q^2, \ \tilde{p}_2 = p_1 \sin q^2 + \frac{p_2}{q^1} \cos q^2. \end{cases}$$

Rezolvare. Din (1) rezultă

$$(2) \quad \tilde{p}_1 d\tilde{q}^1 + \tilde{p}_2 d\tilde{q}^2 - c(p_1 dq^1 + p_2 dq^2) = (1-c)(p_1 dq^1 + p_2 dq^2),$$

unde c este o constantă nenulă.

Tranformarea (1) este canonică dacă şi numai dacă membrul drept al egalităţii (2) este o diferenţială exactă. Pentru aceasta trebuie să avem c=1. Prin urmare, transformarea (1) este o transformare canonică univalentă, însă nu este liberă.

Observaţie. Formulele $(1)_1$ şi $(1)_2$ reprezintă transformarea dintre coordonatele carteziene $(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2)$ şi coordonatele polare (q^1, q^2), în cazul mişcării plane a unui punct.

364. Se consideră un sistem format din n puncte materiale, liber şi izolat. Să se arate că legile de conservare deduse din teoremele impulsului total şi a momentului cinetic total nu sînt independente.

Rezolvare. Deoarece sistemul este izolat de acţiuni externe,

teorema impulsului (13.8) şi teorema momentului cinetic (13.10), pe componente, dau integralele prime

(1) $$I_i = C_i \, , \mathcal{K}_i = C_{3+i} \, , \; i=\overline{1,3} \, ,$$

unde $C_1,\ldots,C_6$ sînt constante.

Pentru a simplifica lucrurile considerăm un punct oarecare al sistemului. Fie m masa punctului P şi $\overline{r} = x_i \overline{e}_i$, $i=\overline{1,3}$, vectorul său de poziţie. Impulsul punctului material P şi momentul cinetic al său au, respectiv, componentele

(2) $$p_i = m\dot{x}_i \, , \quad \varkappa_i = m \, \varepsilon_{ijk} x_j \dot{x}_k = \varepsilon_{ijk} x_j p_k \, , \; i,j,k=\overline{1,3} \, ,$$

în care ε_{ijk} este tensorul de permutare al lui Ricci definit prin (2.4).

Parantezele lui Poisson pentru cantităţile $p_i, \varkappa_i$ au expresiile

(3) $$(p_i,p_j) = 0, \; (p_i, \varkappa_j) = \varepsilon_{ijk} p_k \, , \; (\varkappa_i, \varkappa_j) = \varepsilon_{ijk} \varkappa_k \, .$$

Facem observaţia că parantezele lui Poisson în care o cantitate (p sau $\varkappa$) se referă la un punct, iar a doua la alt punct, sînt identic nule. Prin urmare, dacă scriem relaţiile de forma (3) pentru toate punctele sistemului şi apoi le sumăm, obţinem

(4) $$(I_i,I_j) = 0, \; (I_i, \mathcal{K}_j) = \varepsilon_{ijk} I_k \, , \; (\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j) = \varepsilon_{ijk} \mathcal{K}_k \, .$$

Ţinînd seama de teorema lui Poisson, egalităţile (4) ne arată că cele şase legi de conservare (1) nu sînt independente. Într-adevăr, dacă, de exemplu, au loc integralele

(5) $$I_1 = C_1 \, , \mathcal{K}_1 = C_4 \, , \quad \mathcal{K}_2 = C_5 \, ,$$

şi atunci au loc integralele

(6) $$I_3 = C_3 \, , \quad \mathcal{K}_3 = C_6 \, , \quad I_2 = C_2 \, .$$

365. Să se studieze mişcarea unui sistem format din două puncte materiale libere, între care se exercită legea atracţiei universale (problema celor două corpuri).

Rezolvare. Utilizăm notaţiile şi unele rezultate de la problema 266 (v. şi problema 268). Centrul de masă P^* al punctelor materiale P_1 şi P_2 se mişcă rectiliniu şi uniform. Raportăm mişcarea la reperul $Ox_1x_2x_3$ care are originea în centrul de masă al sistemului ($O \equiv P^*$) şi direcţiile axelor Ox_i fixe. Acest reper este inerţial. În acest caz putem scrie

$$m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 = 0 . \tag{1}$$

Deoarece punctul O aparţine segmentului P_1P_2, din (1) deducem

$$m_1r_1 = m_2r_2 . \tag{2}$$

Notînd cu r distanţa $\overline{P_1P_2}$ avem

$$r = r_1 + r_2 , \tag{3}$$

astfel încît relaţiile (2) şi (3) dau

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}r , \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}r . \tag{4}$$

În continuare vom folosi un sistem de coordonate sferice cu polul în punctul O. Dacă r_1, φ, θ sînt coordonatele sferice ale punctului P_1, atunci coordonatele sferice ale punctului P_2 sînt $r_2, \varphi+\pi, \theta+\pi$. Prin urmare, avem un sistem material cu trei grade de libertate. Acest rezultat se datoreşte faptului că am fixat centrul de masă al celor două puncte, anulînd astfel trei grade de libertate.

Dacă introducem masa redusă a sistemului

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} , \text{ sau } m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} , \tag{5}$$

atunci energia cinetică totală are expresia

(6) $$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta) .$$

In cazul de faţă funcţia de forţe este de forma

(7) $$U = k\frac{m_1 m_2}{r} .$$

Impulsurile generalizate sînt date de formulele

(8) $$p_r = m\dot{r} , \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} , \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\cos^2\theta .$$

Rezultă că funcţia lui Hamilton este definită prin egalitatea

(9) $$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}p_\varphi^2 - \frac{c}{r}\right) , \quad c = 2km m_1 m_2 .$$

Ecuaţiile canonice ale mişcării sistemului sînt următoarele:

(10) $$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{p_r}{m} , \quad \dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} , \quad \dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{mr^2\cos^2\theta} , \\ \dot{p}_r = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{p_\theta^2}{r^3} + \dfrac{p_\varphi^2}{r^3\cos^2\theta} - \dfrac{c}{2r}\right) , \quad \dot{p}_\theta = -\dfrac{p_\varphi^2\sin\theta}{mr^2\cos^3\theta} , \quad \dot{p}_\varphi = 0. \end{cases}$$

Sistemul mecanic de care ne ocupăm este soleromen, iar variabila φ este ciclică, deci avem integralele prime ale ecuaţiilor (10)

(11) $$H = h , \quad p_\varphi = a ,$$

h şi a fiind constante. Prima dintre egalităţile (11) reprezintă integrala energiei, iar a doua reprezintă integrala ariilor în planul x_1Ox_2 . Se verifică uşor că paranteza lui Poisson (p_φ, H) este nulă, deci nu putem găsi o nouă integrală cu ajutorul teoremei lui Poisson .

Vom integra sistemul canonic (10) prin metoda lui Hamilton-Jacobi. Ecuaţia cu derivate parţiale a lui Hamilton-Jacobi devine

(12) $$2mr^2\frac{\partial S}{\partial V} + r^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - cr = 0 .$$

Căutăm o integrală completă a ecuaţiei (12) de forma

(13) $S = -ht + a\varphi + R(r,h,a,\alpha) + \Theta(\theta,h,a,\alpha)$,

α fiind o nouă constantă.

Inlocuind pe S din (13) în (12) obţinem

(14) $r^2R'^2 - 2mhr^2 - cr + \Theta'^2 + a^2/\cos^2\theta = 0$,

unde am pus $R' = dR/dr$ şi $\Theta' = d\Theta/d\theta$.

Variabilele r şi θ fiind independente, egalitatea (14) conduce la

(15) $r^2R'^2 = 2mhr^2 + cr - \alpha^2$, $\Theta'^2 = \alpha^2 - a^2/\cos^2\theta$.

Din ecuaţiile $(15)_2$ deducem că trebuie să avem $\alpha^2 \geq a^2$. Facem observaţia că, fără a micşora generalitatea problemei, putem presupune $\alpha a > 0$. Astfel putem face notaţia

(16) $\cos\gamma = a/\alpha$.

In continuare vom examina separat cazurile $h < 0$ şi $h > 0$.

A. Dacă $h < 0$ atunci egalitatea $(15)_1$ este posibilă numai pentru $8mh\alpha^2 + c^2 > 0$, sau $8mh\alpha^2 + c^2 = 0$.

Presupunînd prima condiţie îndeplinită, rezultă că trinomul $2mhr^2 + cr - \alpha^2$ are două zerouri pozitive z_1, z_2 $(0 < z_1 < z_2)$ şi mişcarea după coordonata r este o libraţie între limitele z_1 şi z_2.

Din relaţiile (13) şi (15) găsim

$$S = -ht + a\varphi + \int_{z_1}^{r} \left(2mh + \frac{c}{x} - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx + a\int_{0}^{\theta} (tg^2\gamma - tg^2\tau)^{\frac{1}{2}} d\tau \quad .$$

Prin urmare, impulsurile generalizate au expresiile

$$p_r = \left(2mh + \frac{c}{r} - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^{1/2} , \quad p_\theta = a(tg^2\gamma - tg^2\theta)^{1/2} , \quad p_\varphi = a ,$$

iar variabilele r, θ şi φ satisfac ecuaţiile

$$(17)\quad \begin{cases} m\int_{z_1}^{r}\left(2mh+\frac{\varrho}{x}-\frac{a^2}{x^2}\right)^{-1/2}dx = t-t_0\,, \\ \int_0^{\theta}\left(tg^2\gamma - tg^2\tau\right)^{-1/2}d(tg\tau) = \varphi - b\,, \\ \alpha\int_{z_1}^{r}\left(2mh+\frac{\varrho}{x}-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)^{-1/2}d\left(\frac{1}{x}\right)+\int_0^{\theta}\left(\sin^2\gamma-\sin^2\tau\right)^{-\frac{1}{2}}d(\sin\tau)=\beta\,, \end{cases}$$

t_0, b şi β fiind constante arbitrare.

Ecuaţia $(17)_2$ poate fi scrisă sub forma

$$(18)\qquad tg\theta = tg\gamma\sin(\varphi - b)\,.$$

Deoarece avem

$$x_1 = r\cos\theta\cos\varphi\,,\quad x_2 = r\cos\theta\sin\varphi\,,\quad x_3 = r\sin\theta\,,$$

ecuaţia (18) devine

$$(18')\qquad x_1\sin b - x_2\cos b + x_3 ctg\gamma = 0\,,$$

deci cele două puncte materiale se mişcă într-un plan care trece prin O.

Presupunem, pentru a fixa ideile, că $\alpha > 0$ şi facem substituţia

$$(19)\qquad \sin\theta = \sin\gamma\sin u\,.$$

Avînd în vedere egalităţile

$$\alpha\int_{z_1}^{r}\left(2mh+\frac{\varrho}{x}-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)^{-1/2}d\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{z_1}^{r}\left[\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z_2}\right)\right]^{-1/2}d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\arccos\frac{\frac{2}{r}-\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}}\,,$$

$$\int_0^{\theta}\left(\sin^2\gamma-\sin^2\tau\right)^{-1/2}d(\sin\tau) = \arcsin\frac{\sin\theta}{\sin\gamma} = u\,,$$

ecuaţia $(17)_3$ conduce la

(20) $$\frac{2}{r} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)\cos(u - \beta) .$$

Ecuaţiile (4), (18),(19) şi (20) ne dau traiectoriile celor două puncte. Rezultă că punctele P_1 şi P_2 se mişcă pe elipse. Cele şase constante de integrare h, a, γ, b, β şi t_0 au interpretări simple. Interpretările constantelor h şi a decurg nemijlocit din formulele (11). Ecuaţia (18') ne arată că γ reprezintă unghiul dintre planul mişcării punctelor materiale şi planul x_1Ox_2, de aceea γ se mai numeşte înclinarea orbitelor. Din egalitatea (18) deducem că b este valoarea lui φ pentru $\theta = 0$. De asemenea, ecuaţia (18') spune că proiecţia normalei planului mişcării pe planul x_1Ox_2, face cu axa Ox_1 unghiul $b - \frac{\pi}{2}$. Relaţia (20) implică faptul că β este valoarea lui u pentru $r = z_1$. In sfîrşit, ecuaţia $(17)_1$ ne arată că t_0 este valoarea lui t pentru $r = z_1$.

Legile de mişcare ale punctelor P_1 şi P_2 se deduc din ecuaţia $(17)_1$. Această ecuaţie poate fi scrisă sub forma

(21) $$t - t_0 = (m/2|h|)^{1/2} \int_{z_1}^{r} \left[(z_2-x)(x-z_1)\right]^{-1/2} x\,dx .$$

Introducînd anomalia excentrică prin relaţia

(22) $$r = z_1\cos^2\frac{\psi}{2} + z_2\sin^2\frac{\psi}{2} = \frac{z_1+z_2}{2}(1-e\cos\psi), \quad e = \frac{z_2-z_1}{z_2+z_1} ,$$

egalitatea (21) conduce la ecuaţia lui Kepler

(23) $$\psi - e\sin\psi = \mu(t - t_0) ,$$

unde am pus

$$\mu = \frac{2}{z_1 + z_2}\left(\frac{2|h|}{m}\right)^{1/2} .$$

Pentru a găsi expresia lui r în funcţie de t, reprezentăm pe r în formă de serie Fourier

$$(24)\qquad r = (z_1+z_2)\Big[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny\Big], \quad y = \mu(t-t_0).$$

Coeficienţii a_0 şi a_n sînt daţi de formulele

$$(25)\qquad a_0 = \frac{1}{\pi(z_1+z_2)}\int_0^{\pi} r\,dy, \quad a_n = \frac{2}{\pi(z_1+z_2)}\int_0^{\pi} r\cos ny\,dy,$$

$$n=1,2,\ldots$$

Avînd în vedere relaţiile (22) şi (23) obţinem

$$(25')\qquad a_0 = \tfrac{1}{4}(2+e^2), \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-e\cos\psi)\cos ny\,dy, \quad n=1,2,\ldots$$

Cu ajutorul unei integrări prin părţi găsim

$$a_n = -\frac{e}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin ny\,\sin\psi\,d\psi = \frac{e}{2n\pi}\int_0^{\pi}\big[\cos(ny+\psi)-\cos(ny-\psi)\big]\,d\psi =$$

$$= \frac{e}{2n\pi}\int_0^{\pi}\big[\cos((n+1)\psi - ne\cos\psi)-\cos((n-1)\psi - ne\cos\psi)\big]\,d\psi =$$

$$= \frac{e}{2n}\big[J_{n+1}(ne) - J_{n-1}(ne)\big], \quad n = 1,2,\ldots,$$

unde $J_k(x)$ este funcţia lui Bessel

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k\tau - x\sin\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{(x/k)^k}{k!}\Big[1 - \frac{(x/2)^2}{1.(k+1)} + \frac{(x/2)^4}{1.2.(k+1)(k+2)} \ldots\Big].$$

Astfel am exprimat pe r în funcţie de t. Variabilele θ şi ψ se exprimă în funcţie de t prin intermediul relaţiilor (20), (19) şi (18). In aplicaţii putem determina pe r în funcţie de t, cu ajutorul variabilei auxiliare ψ, utilizînd formulele (22) şi (23).

Dacă $z_1 = z_2$ rezultă că avem $r = z_1 = z_2$ în tot timpul mişcării, deci mişcările punctelor P_1 şi P_2 sînt circulare.

B. In cazul $h>0$ trinomul $2mhr^2+cr-\alpha^2$ are două zerouri de semne contrare $z_2<0<z_1$ şi mişcarea are loc pentru $r\in[z_1,+\infty)$.

Nu vom prezenta detaliat acest caz, deoarece este asemănător cu primul caz. Menţionăm numai deosebirile care apar aici. Astfel în formula (20), în locul lui $\cos(u-\beta)$ intervine $\operatorname{ch}(u-\beta)$, iar formulele (21),(22) şi (23) se înlocuiesc,respectiv, prin

$$(21')\qquad t-t_0=(m/2h)^{1/2}\int_{z_1}^{r}\left[(x-z_1)(x-z_2)\right]^{-1/2}x\,dx\,,$$

$$(22')\qquad r=\frac{z_1+z_2}{2}(1-e\operatorname{ch}\psi)\,,$$

$$(23')\qquad \psi-e\operatorname{sh}\psi=\mu(t-t_0)\,,$$

unde e şi μ au expresiile de la cazul A.

De data aceasta punctele P_1 şi P_2 se mişcă pe hiperbole.

366. Să se studieze mişcarea unui punct material P, situat într-un plan fix şi atras de două centre fixe din acelaşi plan, cu forţe invers proporţionale cu pătratele distanţelor respective.

Rezolvare. Alegem reperul x_1Ox_2 în planul mişcării astfel încît centrele atractive să fie $C_1(1,0)$ şi $C_2(-1,0)$. Forţa care acţionează asupra punctului P are expresia

$$(1)\qquad \vec{F}=-k_1\frac{\vec{r}-\vec{e}_1}{\overline{PC}_1^3}-k_2\frac{\vec{r}+\vec{e}_1}{\overline{PC}_2^3}\,,\quad \vec{r}=\overrightarrow{OP}\,,$$

k_1 şi k_2 fiind două constante pozitive.

Utilizăm coordonatele generalizate θ şi φ definite prin relaţiile

$$(2)\qquad x_1=\cos\theta\operatorname{ch}\varphi\,,\quad x_2=\sin\theta\operatorname{sh}\varphi\,,$$

deci curbele $\varphi=$ const. şi $\theta=$ const. sînt respectiv elipsele

și hiperbolele cu focarele C_1 și C_2. După însești definițiile acestor curbe avem

$$\overline{PC}_1 + \overline{PC}_2 = 2\,\mathrm{ch}\varphi\ ,\quad \overline{PC}_2 - \overline{PC}_1 = 2\cos\theta\ ,$$

prin urmare, putem scrie

$$\overline{PC}_1 = \mathrm{ch}\,\varphi - \cos\theta\ ,\quad \overline{PC}_2 = \mathrm{ch}\,\varphi + \cos\theta\ . \tag{3}$$

Din (2) rezultă

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = (\mathrm{ch}^2\varphi - \cos^2\theta)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)\ .$$

Presupunînd că masa punctului este egală cu unitatea, deducem că energia cinetică are expresia

$$E = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}^2\varphi - \cos^2\theta)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)\ . \tag{4}$$

In cazul de față avem următoarea funcție de forță

$$U = k_1/\overline{PC}_1 + k_2/\overline{PC}_2 = \frac{\lambda\,\mathrm{ch}\varphi + \mu\cos\theta}{\mathrm{ch}^2\varphi - \cos^2\theta}\ , \tag{5}$$

unde am notat $\lambda = k_1+k_2$ și $\mu = k_1-k_2$.

Comparînd formulele (4) și (5) cu (19.39), vedem că sîntem în cazul de integrabilitate al lui Liouville.

Impulsurile generalizate sînt definite prin relațiile

$$p_\theta = (\mathrm{ch}^2\varphi - \cos^2\theta)\dot{\theta}\ ,\quad p_\varphi = (\mathrm{ch}^2\varphi - \cos^2\theta)\dot{\varphi}\ ,$$

astfel încît funcția lui Hamilton este dată de egalitatea

$$H = \frac{1}{2}(p_\theta^2 + p_\varphi^2 - 2\lambda\,\mathrm{ch}\varphi - 2\mu\cos\theta)/(\mathrm{ch}^2\varphi - \cos^2\theta)\ . \tag{6}$$

Ecuația lui Hamilton-Jacobi devine

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2 - 2\lambda\,\mathrm{ch}\varphi - 2\mu\cos\theta - 2h(\mathrm{ch}^2\varphi - \cos^2\theta) = 0\ , \tag{7}$$

h fiind constanta energiei.

Căutăm o integrală completă a ecuației (7) sub forma

$$W = W_1(\theta, h, a) + W_2(\varphi, h, a)\ , \tag{8}$$

în care a este o nouă constantă. Deducem

$$W_1'^2 + 2h\cos^2\theta - 2\mu\cos\theta = -W_2'^2 + 2h\,\mathrm{ch}^2\varphi + 2\lambda\,\mathrm{ch}\varphi\ , \tag{9}$$

unde am pus $W_1' = dW_1/d\theta$ și $W_2' = dW_2/d\varphi$.

Egalitatea (9) conduce la

$$(10)\qquad \begin{cases} W_1'^2 = -2h\cos^2\theta + 2\mu\cos\theta + a , \\ W_2'^2 = 2h\,\mathrm{ch}^2\varphi + 2\lambda\,\mathrm{ch}\varphi - a . \end{cases}$$

Din (8) şi (10) rezultă

$$(11)\qquad W = \int (a + 2\mu\cos\theta - 2h\cos^2\theta)^{1/2} d\theta + \int (2h\,\mathrm{ch}^2\varphi + 2\lambda\,\mathrm{ch}\varphi - a)^{1/2} d\varphi .$$

Ecuaţiile de mişcare sînt date de relaţiile

$$\frac{\partial W}{\partial a} = b , \qquad \frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0 ,$$

b şi t_0 fiind constante arbitrare (v. formulele (19,36)).

Astfel obţinem ecuaţiile

$$(12)\qquad \begin{cases} \int (a+2\mu\cos\theta - 2h\cos^2\theta)^{-1/2} d\theta - \\ \quad - \int (2h\,\mathrm{ch}^2\varphi + 2\lambda\,\mathrm{ch}\varphi - a)^{-1/2} d\varphi = 2b , \\ - \int (a+2\mu\cos\theta - 2h\cos^2\theta)^{-1/2}\cos^2\theta\, d\theta + \\ \quad + \int (2h\,\mathrm{ch}^2\varphi + 2\lambda\,\mathrm{ch}\varphi - a)^{-1/2}\mathrm{ch}^2\varphi\, d\varphi = t - t_0 . \end{cases}$$

Ecuaţiile (12) conţin integrale eliptice, însă ele ne permit să facem un studiu calitativ al mişcării punctului.

367. Se consideră axa verticală fixă Ox_2 şi planul x_1Ox_2 care se roteşte uniform în jurul ei cu viteza unghiulară ω. Să se studieze mişcarea fără frecare a unei bare omogene AB în acest plan.

Rezolvare. Luăm masa barei egală cu unitatea şi notăm cu $2c$ lungimea lui AB. Presupunem că axa Ox_2 este verticală ascendentă. Avem un sistem mecanic olonom şi reonom, cu trei grade de libertate. Poziţia barei AB în planul x_1Ox_2 poate fi determinată prin coordonatele x_1^*, x_2^* ale mijlocului său P^* şi unghiul θ dintre vectorul $\vec{AB}$ şi axa orizontală Ox_1.

Considerăm un punct $P \in (AB)$, definit prin parametrul

$\lambda = \overline{P^*P}$, $\lambda \in [-a, a]$. Pentru determinarea vitezei absolute $\bar{v}$ a punctului P, utilizăm formula (3.8). Viteza relativă a punctului P şi viteza sa de transport au respectiv expresiile

$$\bar{v}_r = (\dot{x}_1^* - \lambda\dot{\theta}\sin\theta)\bar{e}_1 + (\dot{x}_2^* + \lambda\dot{\theta}\cos\theta)\bar{e}_2, \quad \bar{v}_t = -\omega(x_1^* + \lambda\cos\theta)\bar{e}_3.$$

Rezultă

$$v^2 = \dot{x}_1^{*2} + \dot{x}_2^{*2} + \omega^2 x_1^{*2} + \lambda^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2\cos^2\theta) +$$

$$+ 2\lambda(\dot{x}_2^*\cos\theta - \dot{x}_1^*\sin\theta)\dot{\theta} + 2\lambda\omega^2 x_1^*\cos\theta .$$

Astfel energia cinetică absolută a barei este dată de formula

$$(1) \quad E = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^{*2} + \dot{x}_2^{*2} + k^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^{*2} + k^2\cos^2\theta), \quad k^2 = a^2/3.$$

In cazul de faţă funcţia de forţe are forma

$$(2) \quad U = -gx_2^* ,$$

iar impulsurile generalizate sînt definite prin relaţiile

$$p_1 = \dot{x}_1^* , \quad p_2 = \dot{x}_2^* , \quad p_3 = k^2\dot{\theta} ,$$

coordonatele generalizate fiind numerotate în ordinea x_1^*, x_2^*, θ.

Deoarece avem

$$E_2 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^{*2} + \dot{x}_2^{*2} + k^2\dot{\theta}^2), \quad E_0 = \frac{1}{2}\omega^2(x_1^{*2} + k^2\cos^2\theta) ,$$

deducem că funcţia lui Hamilton ea dată de egalitatea

$$(3) \quad H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2/k^2) - \frac{1}{2}\omega^2(x_1^{*2} + k^2\cos^2\theta) + gx_2^* .$$

Aplicăm metoda lui Hamilton-Jacobi pentru integrarea ecuaţiilor canonice corespunzătoare acestui caz. Ecuaţia lui Hamilton-Jacobi devine

$$(4) \quad 2\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial x_1^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2^*}\right)^2 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2 - \omega^2(x_1^{*2} + k^2\cos^2\theta) +$$

$$+ 2gx_2^* = 0.$$

Pentru această ecuaţie căutăm o soluţie de forma

$$(5) \quad S = -ht + W_1(x_1^*) + W_2(x_2^*) + W_3(\theta) ,$$

unde constanta h reprezintă energia totală generalizată a barei.

Din (4) şi (5) obţinem egalitatea

$$(W_1'^2 - \omega^2 x_1^{*2}) + (W_2'^2 + 2gx_2^*) + \left(\frac{1}{k^2} W_3'^2 - k^2\omega^2\cos^2\theta\right) = 2h ,$$

care conduce la ecuaţiile

$$(6) \qquad W_1'^2 = \omega^2 x_1^{*2} + a_1 , \quad W_2'^2 = a_2 - 2gx_2^* , \quad \frac{1}{k^2} W_3'^2 = k^2\omega^2\cos^2\theta + 2h - a_1 - a_2 ,$$

a_1 şi a_2 fiind constante arbitrare.

Rezultă că funcţia

$$(7) \qquad S = -ht + \int (\omega^2 x_1^{*2} + a_1)^{1/2} dx_1^* + \int (a_2 - 2gx_2^*)^{1/2} dx_2^* + k\int (k^2\omega^2\cos^2\theta + 2h - a_1 - a_2)^{1/2} d\theta ,$$

este o integrală completă a ecuaţiei cu derivate parţiale (4).

Ecuaţiile de mişcare sub formă finită sînt date de relaţiile

$$(8) \quad \begin{cases} \int (\omega^2 x_1^{*2} + a_1)^{-1/2} dx_1^* - k\int (k^2\omega^2\cos^2\theta + 2h - a_1 - a_2)^{-1/2} d\theta = b_1 , \\ \int (a_2 - 2gx_2^*)^{-1/2} dx_2^* - k\int (k^2\omega^2\cos^2\theta + 2h - a_1 - a_2)^{-1/2} d\theta = b_2 , \\ k\int (k^2\omega^2\cos^2\theta + 2h - a_1 - a_2)^{-1/2} d\theta = t - t_0 , \end{cases}$$

b_1, b_2 şi t_0 fiind constante arbitrare. Aceste ecuaţii dau x_1^*, x_2^*, θ în funcţie de t şi de şase constante a_1, a_2, h, b_1, b_2 şi t_0.

Evident, ecuaţiile (8) sînt echivalente cu sistemul

$$(9) \quad \begin{cases} \int (\omega^2 x_1^{*2} + a_1)^{-1/2} dx_1^* = t - t_0 + b_1 , \quad \int (a_2 - 2gx_2^*)^{-1/2} dx_2^* = t - t_0 + b_2 , \\ k\int (k^2\omega^2\cos^2\theta + 2h - a_1 - a_2)^{-1/2} d\theta = t - t_0 . \end{cases}$$

Ecuaţiile $(9)_1$ şi $(9)_2$ pot fi explicitate şi devin

$$(10) \qquad x_1^* = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} , \quad x_2^* = -\frac{g}{2}t^2 + C_3 t + C_4 ,$$

unde am făcut notaţiile

$$c_1 = \frac{1}{2\omega} e^{\omega(b_1 - t_0)}, \quad c_2 = -\frac{a_1}{2\omega} e^{\omega(t_0 - b_1)},$$

$$c_3 = g(t_0 - b_2), \quad c_4 = \frac{a_2}{2g} - \frac{g}{2}(t_0 - b_2)^2.$$

Integrala din formula $(9)_3$ este eliptică. Punînd $\varphi = 2\theta$, se vede uşor că funcţia φ satisface ecuaţia pendulului matematic de lungime g/ω^2

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0.$$

Pentru cantităţile p_1, p_2, p_3 se găsesc valorile

$$p_1 = (\omega^2 x_1^{*2} + a_1)^{1/2}, \quad p_2 = (a_2 - 2g x_2^*)^{1/2}, \quad p_3 = k(k^2\omega^2\cos^2\theta + 2h - a_1 - a_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Capitolul XX

STABILITATE ŞI OSCILAŢII

Fie un sistem mecanic olonom cu n grade de libertate, a cărui poziţie se determină cu ajutorul coordonatelor generalizate q^i, $i=\overline{1,n}$. In continuare ne vom ocupa numai de stabilitatea echilibrului, deoarece stabilitatea unei mişcări date se poate reduce la stabilitatea unei poziţii de echilibru a sistemului material respectiv (modificînd în mod adecvat forţele date). Reamintim că o poziţie a sistemului se numeşte poziţie de echilibru, dacă sistemul, care se află la momentul iniţial în această poziţie cu vitezе nule, rămîne în această poziţie în tot timpul. Intr-o poziţie de echilibru toate forţele generalizate sînt nule $Q_i = 0$, $i=\overline{1,n}$. Putem presupune că poziţia de echilibru considerată este situată în originea coordonatelor $q^i=0$, $i=\overline{1,n}$. Definiţia stabilităţii echilibrului este aceeaşi ca pentru un punct material (v.cap.IX), cu menţiunea că P_0, P_1 şi P sînt poziţii din spaţiul configuraţiilor Γ_n. O definiţie echivalentă a stabilităţii echilibrului este următoarea :

Poziţia de echilibru $q^i = 0$, $i=\overline{1,n}$ (sau starea de echilibru $q^i = 0$, $\dot{q}^i = 0$, $i=\overline{1,n}$) se numeşte stabilă, dacă pentru orice $\varepsilon>0$, există $\eta(\varepsilon)>0$ aşa încît pentru orice $t>t_0$ să avem

(20.1) $$|q^i(t)|<\varepsilon \ , \ |\dot{q}^i(t)|<\varepsilon \ , \ i=\overline{1,n} \ ,$$

de îndată ce la momentul inițial t_0 au loc inegalitățile

(20.2) $$|q_0^i| < \eta \ , \ |\dot{q}_0^i| < \eta \ , \ i=\overline{1,n} \ .$$

In locul expresiei „poziția de echilibru $q^i=0$" se mai folosește expresia „soluția $q^i=0$ a ecuațiilor mișcării".

Pentru un sistem mecanic conservativ, în spațiul Γ_n al configurațiilor, teorema lui Lejeune-Dirichlet de stabilitate și teorema lui Leapunov de nestabilitate a echilibrului, se enunță la fel ca pentru un punct material (v. cap.IX). Teorema lui Lejeune-Dirichlet este valabilă

și pentru un sistem neconservativ, care se obține dintr-un sistem conservativ prin adăugarea unor forțe giroscopice și a unor forțe disipative.

O poziție de echilibru stabil se numește asimptotic stabilă, dacă există $\eta_0 > 0$ astfel încît să avem

(20.3) $$\lim_{t \to \infty} q^i(t) = 0 \ , \ \lim_{t \to \infty} \dot{q}^i(t) = 0 \ , \ i=\overline{1,n} \ ,$$

ori de cîte ori sînt satisfăcute relațiile

(20.4) $$|q_0^i| < \eta_0 \ , \ |\dot{q}_0^i| < \eta_0 \ , \ i=\overline{1,n} \ .$$

Presupunem că sistemul este scleronom, iar funcția de forțe U și forțele generalizate nepotențiale Q_i^* nu depind explicit de t. Un sistem mecanic se numește disipativ definit dacă puterea forțelor nepotențiale este negativ definită. Funcția cu valori reale $Q_i^* \dot{q}^i$, definită în spațiul cu 2n dimensiuni al stărilor $(q^i, \dot{q}^i)$, se numește negativ definită, dacă se anulează o dată cu $q^i, \dot{q}^i$, $i=\overline{1,n}$ și există o funcție $\lambda(r)$ crescătoare și continuă de variabila reală $r = (q^i q^i + \dot{q}^i \dot{q}^i)^{1/2}$, satisfăcînd condiția $\lambda(0) = 0$, așa încît să avem $Q_i^* \dot{q}^i \leq - \lambda(r)$.

Teorema stabilității asimptotice. Dacă funcția de forțe

$U(q)$ a unui sistem mecanic scleronom şi disipativ definit admite un maxim relativ izolat într-o poziţie de echilibru, atunci această poziţie de echilibru este asimptotic stabilă.

Această teoremă, care reprezintă teorema lui Lejeune-Dirichlet pentru sisteme disipative, este conţinută în următorul criteriu de stabilitate.

Teorema lui Leapunov. Dacă se dă o poziţie de echilibru a unui sistem scleronom, solicitat de forţe care nu depind explicit de t şi există o funcţie $V(q^i,\dot{q}^i)$ de clasă C^1 în spaţiul stărilor $(q^i,\dot{q}^i)$, care admite în poziţia de echilibru un extrem relativ izolat, iar derivata $\frac{dV}{dt}$ (calculată în baza ecuaţiilor de mişcare) are în aceeaşi poziţie un extrem de tip contrar, atunci poziţia de echilibru considerată este stabilă. Dacă extremul derivatei dV/dt este, de asemenea, relativ izolat, poziţia de echilibru este asimptotic stabilă.

Funcţia $V(q^i,\dot{q}^i)$ din teoremă se numeşte funcţia lui Leapunov.

O mare importanţă practică o au oscilaţiile mici, adică mişcările în vecinătatea unei poziţii de echilibru stabil. Pentru simplificare ne limităm la cazul unui sistem conservativ. Prin urmare, presupunem că sistemul mecanic este olonom şi scleronom, iar forţele date derivă din potenţialul $U(q^1,\dots,q^n)$, care nu depinde explicit de t. Energia cinetică are expresia

$$E = E_2 = \frac{1}{2} a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j \quad , \quad i,j = \overline{1,n} \; . \tag{20.5}$$

Putem considera că originea coordonatelor $q^i=0$, $i=\overline{1,n}$ este poziţia de echilibru stabil dată şi că în această poziţie avem $U = 0$. Presupunînd că funcţiile $a_{ij}(q)$, $i,j=\overline{1,n}$ şi $U(q)$ sînt dezvoltabile în serie în vecinătatea originii, aproximăm energia cinetică E şi funcţia de forţe U prin formele pătratice cu coeficienţi constanţi

(20.6) $E_s = \frac{1}{2} a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$, $U_s = -\frac{1}{2}\beta_{ij}q^iq^j$, $a_{ij} = a_{ij}(0)$,

$$\beta_{ij} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^i \partial q^j}\right)_0 ,$$

numite respectiv energia cinetică simplificată şi funcţia de forţe simplificată. Formele pătratice $a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ şi $\beta_{ij}q^iq^j$ sînt pozitiv definite.

Ecuaţiile lui Lagrange (18.11) devin

(20.7) $$a_{ij}\ddot{q}^j + \beta_{ij}q^j = 0 , \quad i,j = \overline{1,n} .$$

Sistemul acesta se numeşte sistemul în primă aproximaţie ce corespunde lui (18.11), sau aproximarea liniară a sistemului neliniar (18.11).

Teorema lui Lejeune-Dirichlet se aplică problemei liniarizate în care energia cinetică este E_s şi funcţia de forţe U_s.

Teorema lui Poincaré-Leapunov. Dacă soluţia $q^i = 0$, $i=\overline{1,n}$ a aproximării liniare (20.7) este asimptotic stabilă, atunci $q^i = 0$, $i=\overline{1,n}$ este o soluţie asimptotică stabilă a sistemului neliniar (18.11).

Există o transformare liniară cu coeficienţi constanţi

(20.8) $$q^i = c^i_j\tilde{q}^j , \quad i,j = \overline{1,n} ,$$

prin care formele pătratice E_s şi U_s sînt aduse la formele canonice

(20.9) $$E_s = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^i\dot{\tilde{q}}^i , \quad U_s = -\frac{1}{2}\omega_i^2(\tilde{q}^i)^2 , \quad \omega_i = \text{const.}$$

Variabilele $\tilde{q}^i$ se numesc coordonate normale sau principale.

Ecuaţiile (20.7) se reduc la ecuaţiile a n oscilaţii armonice

(20.10) $$\ddot{\tilde{q}}^i + \omega_i^2\tilde{q}^i = 0 , \quad i=\overline{1,n} \text{ (nesumat).}$$

Mişcarea sistemului în coordonatele q^i este dată de relaţiile

(20.11) $$q^i = c^i_j c^j \sin(\omega_j t + \alpha_j) , \quad i,j = \overline{1,n} ,$$

unde c^j şi α_j sînt 2n constante arbitrare, Fiecare termen al sumei din membrul secund al formulei (20.11) se numeşte **oscilaţie principală a sistemului.**

Fie un sistem mecanic conservativ, a cărui poziţie este determinată cu ajutorul a m coordonate neciclice (numite şi coordonate poziţionale) q^i şi n-m coordonate ciclice q^j $(1 \leqslant i \leqslant m,\ m+1 \leqslant j \leqslant n)$. Mişcarea acestui sistem se numeşte staţionară, dacă toate coordonatele neciclice rămîn constante $q^i = q_0^i = \text{const.}$, $i=\overline{1,m}$. Intr-o mişcarea staţionară coordonatele ciclice sînt funcţii liniare de t .

368. Să se studieze mişcarea unui punct material greu pe o suprafaţă fixă, în vecinătatea unei poziţii de echilibru stabil.

Rezolvare. Alegem reperul cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$ în modul următor: originea O coincide cu poziţia de echilibru a punctului material, axele Ox_1 şi Ox_2 sînt tangente la liniile de curbură sle suprafeţei în punctul O, iar axa Ox_3 este verticală ascendentă.

Presupunînd că suprafaţa este dată prin ecuaţia

$$x_3 = f(x_1,x_2) \tag{1}$$

şi luînd masa punctului egală cu unitatea, avem

$$2E = \dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\dot{x}_2\right)^2, \quad U = -gf(x_1,x_2) . \tag{2}$$

Rezultă că funcţiile $f(x_1,x_2), \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ au valori nule în origine şi că funcţia $f(x_1,x_2)$ este pozitivă în vecinătatea originii. Astfel, dezvoltarea în serie a lui $f(x_1,x_2)$ în vecinătatea originii este de forma

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{R_1}+\frac{x_2^2}{R_2}\right)+\dots ,$$

unde constantele pozitive R_1 şi R_2 reprezintă razele de curbură principale în punctul O .

In aceste condiţii obţinem

$$(3) \qquad 2E_s = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 , \quad -2U_s = g\left(\frac{x_1^2}{R_1} + \frac{x_2^2}{R_2}\right) ,$$

prin urmare, x_1, x_2 sînt coordonate normale şi ecuaţiile diferenţiale ale micilor oscilaţii sînt

$$(4) \qquad \ddot{x}_1 + \frac{g}{R_1} x_1 = 0 , \quad \ddot{x}_2 + \frac{g}{R_2} x_2 = 0 .$$

Deducem că mişcarea punctului se face în planul x_1Ox_2 după legea

$$(5) \quad x_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \; x_2 = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R_1}} ,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R_2}} ,$$

$C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ fiind patru constante arbitrare.

Dacă cel puţin una dintre cantităţile $1/R_1$, $1/R_2$ este nulă, forma pătratică $-2U_s$ nu mai este definită. Presupunem, de exemplu, că $\frac{1}{R_1} = 0$. Ecuaţia $(4)_1$ dă atunci legea de mişcare

$$x_1 = At + B , \quad A, B = \text{const.},$$

care nu poate reprezenta o oscilaţie mică. In acest caz trebuie să luăm în consideraţie termeni neliniari care intervin în ecuaţiile lui Lagrange. Astfel, presupunînd că avem

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_2^2}{R_2} + \frac{x_1^4}{a}\right) , \quad a = \text{const.} > 0 ,$$

putem păstra, în primă aproximaţie, ecuaţia $(4)_2$, iar ecuaţia $(4)_1$ o înlocuim prin

$$(6) \qquad \ddot{x}_1 + 2\frac{g}{a} x_1^3 = 0 .$$

Această ecuaţie, prin integrare, conduce la

$$(7) \qquad \dot{x}_1^2 = \frac{g}{a}(c^4 - x_1^4) ,$$

constanta arbitrară c fiind amplitudinea oscilaţiei lui x_1.

Din (7) deducem

$$(8) \qquad t = \pm \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{x_1^o}^{x_1} (c^4-u^4)^{-\frac{1}{2}} du \ , \quad x_1^o = \text{const.}$$

Punînd $x_1 = c(1-z^2)^{1/2}$, integrala eliptică din formula precedentă se reduce la forma canonică şi avem

$$(9) \qquad t-t_o = \mp \frac{1}{c} \sqrt{\frac{a}{2g}} \int_o^z \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{1}{2}u^2)}} \ , \quad t_o = \text{cont.}$$

Cu ajutorul funcţiei sinus eliptic sau sinus amplitudine a lui Jacobi, $sn\ x = \sin am x$, relaţia (9) devine

$$z = \mp sn\ c \sqrt{\frac{2g}{a}}(t-t_o) \ .$$

Aşadar, putem scrie

$$x_1 = c\ cn\ c \sqrt{\frac{2g}{a}}(t - t_o) \ ,$$

unde funcţia $cn\ x$ a lui Jacobi este definită prin egalitatea

$$cn\ x = \sqrt{1-sn^2 x} \ .$$

In cazul de faţă modulul funcţiilor lui Jacobi este $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, iar perioada T a oscilaţiilor în x_1 este invers proporţională cu amplitudinea,

$$T = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{2a}{g}} \int_o^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{1}{2}u^2)}} \ ,$$

deci este foarte mare în cazul micilor oscilaţii. Perioada T poate fi aproximată cu ajutorul dezvoltării în serie de puteri a integrandului respectiv.

Observaţie. In cazul $R_1 = R_2 = R$ regăsim micile oscilaţii ale unui pendul sferic în vecinătatea poziţiei de echilibru stabil.

369. Două pendule matematice P_1 și P_2 de aceeași masă m și de aceeași lungime a, sînt suspendate prin tije rigide și fără masă în punctele O_1 și O_2 ale unei drepte orizontale fixe. Punctele A_1 și A_2 ale tijelor O_1P_1 și O_2P_2, situate la distanța $b \in [0,a]$ de punctele de suspensie, sînt legate printr-un resort, care este destins cînd pendulele sînt verticale. Să se studieze oscilațiile sistemului în planul vertical.

Rezolvare. Considerăm reperul x_1Ox_2 cu originea în punctul $O_1(O \equiv O_1)$, axa Ox_1 verticală descendentă și axa Ox_2 orizontală. Sistemul mecanic dat are două grade de libertate. Luăm drept coordonate generalizate unghiurile φ_1 și φ_2 pe care le fac vectorii $\overrightarrow{O_1P_1}$ și $\overrightarrow{O_2P_2}$ cu axa Ox_1. Energia cinetică a sistemului are expresia

$$E = \frac{1}{2} ma^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) \quad . \tag{1}$$

Lucrul mecanic al sistemului este format din lucrul mecanic al pendulelor P_1, P_2 și lucrul mecanic al resortului A_1A_2. Lucrul mecanic elementar al pendulelor P_1 și P_2, pentru deplasări virtuale compatibile cu legăturile, este egal cu

$$mag\, \delta(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \, .$$

Resortul îl considerăm ca un corp elastic unidimensional asupra căruia nu acționează forțe externe. Cînd resortul este întins alungirea sa este dată de

$$e = \overline{A_1A_2} - \overline{O_1O_2} \, ,$$

forța elastică internă (tensiunea internă) este proporțională cu alungirea

$$F = -2m\frac{k^2}{b^2}e \quad , \quad k = \text{const.},$$

iar lucrul mecanic elementar al tensiunii este

$$F\delta e = -m\frac{k^2}{2b^2}\delta(\overline{A_1A_2} - \overline{O_1O_2})^2 \, .$$

Astfel lucrul mecanic elementar al sistemului are expresia

$$\delta\mathcal{L} = m\,\delta\left[ag(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2) - \frac{k^2}{2b^2}(\overline{A_1A_2}-\overline{O_1O_2})^2\right].$$

Prin urmare, există o funcţie de forţe şi are forma

$$(2)\qquad U = -m\left[ag(1-\cos\varphi_1)+ag(1-\cos\varphi_2)+\frac{k^2}{2b^2}(\overline{A_1A_2}-\overline{O_1O_2})^2\right].$$

Pentru $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ avem o poziţie de echilibru stabil. In continuare vom studia mişcarea sistemului în vecinătatea acestei poziţii. Cum

$$\overline{A_1A_2} - \overline{O_1O_2} \approx b(\varphi_2 - \varphi_1),$$

din (2) deducem că funcţia de forţe simplificată este dată de formula

$$(3)\qquad U_s = -\frac{m}{2}\left[ag(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + k^2(\varphi_2-\varphi_1)^2\right].$$

In cazul de faţă ecuaţiile lui Lagrange liniarizate devin

$$(4)\qquad \begin{cases} a^2\ddot{\varphi}_1 + (ag + k^2)\varphi_1 - k^2\varphi_2 = 0, \\ a^2\ddot{\varphi}_2 - k^2\varphi_1 + (ag + k^2)\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Căutăm o soluţie a acestui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi de forma

$$(5)\qquad \varphi_i = A_i\sin(\omega t+\alpha),\quad i=1,2,\ A_1,A_2,\omega,\alpha = \text{const.},$$

adică de forma unor oscilaţii armonice cu aceeaşi pulsaţie ω (deci cu aceeaşi frecvenţă) şi cu aceeaşi constantă α pentru ambele coordonate.

Inlocuind pe φ_1 şi φ_2 din (5) în (4) obţinem sistemul de ecuaţii algebrice liniare şi omogene.

$$(6)\qquad \begin{cases} (ag + k^2 - a^2\omega^2)A_1 - k^2A_2 = 0, \\ -k^2A_1 + (ag + k^2 - a^2\omega^2)A_2 = 0. \end{cases}$$

Deoarece amplitudinile A_1 şi A_2 ale oscilaţiilor căutate nu pot fi nule, trebuie ca determinantul sistemului (6) să fie egal cu zero. Rezultă două valori pentru pătratul pulsaţiei soluţiei căutate şi anume

$$\omega_1^2 = \frac{g}{a}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{a} + 2\frac{k^2}{a^2}.$$

Pentru $\omega = \omega_1$ găsim $A_1 = A_2 = C_1$, deci avem soluţia

(7) $$\varphi_1 = \varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1),$$

iar pentru $\omega = \omega_2$ deducem $A_1 = -A_2 = C_2$ şi

(8) $$\varphi_1 = -\varphi_2 = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

In prima oscilaţie principală ambele pendule se află în aceeaşi fază în tot timpul, resortul este destins şi pendulele nu se influenţează reciproc. In a doua oscilaţie principală pendulele se află în tot timpul în faze contrare.

O oscilaţie oarecare a sistemului se obţine prin compunerea celor două oscilaţii principale (7) şi (8)

$$\begin{cases} \varphi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \varphi_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{cases}$$

Observaţie. Variabilele

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

sînt coordonate normale ale sistemului.

320. Un tub circular omogen, de secţiune neglijabilă, se poate roti într-un plan vertical în jurul unui punct fix O al său. Un punct material P se poate mişca, fără frecare, în interiorul tubului. Să se studieze oscilaţiile mici ale sistemului în vecinătatea poziţiei de echilibru stabil.

Rezolvare. Luăm reperul x_1Ox_2 cu axa Ox_1 verticală descendentă şi axa Ox_2 orizontală. Sistemul mecanic dat are două grade de libertate. Fie R,M şi C respectiv raza, masa şi centrul tubului, m masa punctului P, θ unghiul vectorului $\overrightarrow{OC}$ cu axa Ox_1 şi φ suplimentul unghiului $\widehat{OCP}$.

Punctul P are vectorul de poziţie

$$\bar{r} = R\left[\cos\theta + \cos(\theta+\varphi)\right]\bar{e}_1 + R\left[\sin\theta + \sin(\theta+\varphi)\,\bar{e}_2\right]$$

şi viteza

$$\bar{v} = R\dot{\theta}\,(-\bar{e}_1\sin\theta + \bar{e}_2\cos\theta) + R(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\left[-\bar{e}_1\sin(\theta+\varphi) + \bar{e}_2\cos(\theta+\varphi)\right].$$

Astfel energia cinetică a sistemului are expresia

$$(1)\quad E = R^2\left[(M+2m\cos^2\frac{\varphi}{2})\dot{\theta}^2 + 2m\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\right].$$

In cazul de faţă funcţia de forţe are forma

$$(2)\qquad U = -gR\left[(M+m)(1-\cos\theta) + m(1-\cos(\theta+\varphi))\right],$$

de unde rezultă că $\theta = \varphi = 0$ este o poziţie de echilibru stabil a sistemului.

Prin urmare, obţinem

$$(3)\quad \begin{cases} E_s = R^2\left[(M+2m)\dot{\theta}^2 + 2m\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\right], \\ U_s = -\frac{1}{2}gR\left[(M+m)\theta^2 + m(\theta+\varphi)^2\right]. \end{cases}$$

Ecuaţiile diferenţiale ale micilor oscilaţii sînt următoarele

$$(4)\quad \begin{cases} (2+k^2)\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \frac{g}{2R}\left[(2+k^2)\theta + \varphi\right] = 0, \quad k^2 = \frac{M}{m}, \\ 2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \frac{g}{R}(\theta+\varphi) = 0. \end{cases}$$

Căutăm o soluţie a acestor ecuaţii diferenţiale de forma

$$(5)\qquad \theta = A_1\sin(\omega t + \alpha), \quad \varphi = A_2\sin(\omega t + \alpha),$$

A_1, A_2, ω şi α fiind constante.

Se deduce sistemul de ecuaţii algebrice

$$(6)\quad \begin{cases} \left[(2+k^2)A_1 + A_2\right]\left(\frac{g}{2R} - \omega^2\right) = 0, \\ 2\left(\frac{g}{2R} - \omega^2\right)A_1 + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)A_2 = 0. \end{cases}$$

Cum A_1 şi A_2 nu pot fi simultan nule, deducem două valori pentru pătratul pulsaţiei soluţiei căutate şi anume

$$\omega_1^2 = \frac{g}{2R}, \qquad \omega_2^2 = \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\frac{g}{R}.$$

Pentru $\omega = \omega_1$ găsim $A_2 = 0$, $A_1 = C_1$, deci avem soluţia

$$(7)\qquad \theta = C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad \varphi = 0,$$

iar pentru $\omega = \omega_2$ obţinem $A_1 = C_2$, $A_2 = -(2+k^2)C_2$, prin urmare

(8) $\theta = C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$, $\varphi = -(2+k^2)C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$.

O oscilaţie oarecare a sistemului se determină prin suprapunerea oscilaţiilor principale (7) şi (8). Astfel putem scrie

$$\theta = C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2) ,$$
$$\varphi = -(2+k^2)C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2) .$$

371. Un sistem material este constituit dintr-o placă omogenă avînd forma unui triunghi isoscel AOB cu baza $\overline{AB} = 2$, înălţimea $\overline{OD} = 3$ şi masa $M_1 = 1$ şi o bară omogenă $\overline{BC} = 2$, de masă $M_2 = 1 + \sqrt{3}$, articulată în B de placă. Punctul O al plăcii este fix şi întregul sistem se află într-un plan vertical. Să se studieze mişcările acestui sistem vecine poziţiei de echilibru stabil.

Rezolvare. In planul mişcării luăm reperul x_1Ox_2 cu axa Ox_1 verticală descendentă şi axa Ox_2 orizontală. Acest sistem mecanic are două grade de libertate. Fie θ unghiul pe care îl face vectorul $\overrightarrow{OD}$ cu axa Ox_1 şi φ unghiul dintre $\overrightarrow{BC}$ şi axa Ox_1. Notînd cu P_1^* centrul de masă al plăcii şi cu P_2^* mijlocul barei BC, avem

$$(1)\quad \begin{cases} \overrightarrow{OP_1^*} = 2(\bar{e}_1\cos\theta - \bar{e}_2\sin\theta) , \\ \overrightarrow{OB} = \sqrt{10}\left[\bar{e}_1\cos(\beta-\theta) + \bar{e}_2\sin(\beta-\theta)\right] , \\ \overrightarrow{OP_2^*} = \overrightarrow{OB} + \bar{e}_1\cos\varphi + \bar{e}_2\sin\varphi , \end{cases}$$

unghiul ascuţit β fiind definit prin relaţia $\operatorname{ctg}\beta = 3 (2\beta = \sphericalangle AOB)$.

Asupra sistemului mecanic dat acţionează forţele de greutate, care admit o funcţie de forţe de forma

(2) $U = 2g\cos\theta + g(1+\sqrt{3})\left[\sqrt{10}\cos(\beta-\theta)+\cos\varphi\right] + \text{const.}$

Poziţiile de echilibru se determină din ecuaţiile

$$2\sin\theta - (1+\sqrt{3})\sqrt{10}\sin(\beta-\theta) = 0,\quad \sin\varphi = 0,$$

sau

(3) $$\operatorname{tg}\theta = 2-\sqrt{3},\quad \sin\varphi = 0.$$

Avînd în vedere că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deducem că cea mai mică valoare a unghiului θ, care verifică ecuaţia $(3)_1$, este $\theta = \frac{\pi}{12}$. Rezultă că pentru $\theta = \frac{\pi}{12}$, $\varphi = 0$ avem o poziţie de echilibru stabil. Punînd $\theta = \psi + \frac{\pi}{12}$ putem scrie

(4) $$U = -g\left[2\sqrt{2}(2+\sqrt{3})(1-\cos\psi)+(1+\sqrt{3})(1-\cos\varphi)\right].$$

Energia cinetică a sistemului este formată din energia cinetică a plăcii şi energia cinetică a barei. Energia cinetică a plăcii este egală cu $\frac{1}{2}I_{33}\dot{\psi}^2$ (v.formula (14.7)), unde I_{33} este momentul de inerţie al plăcii faţă de punctul O. Pentru calcularea lui I_{33} luăm una din axele solidare cu placa de-a lungul dreptei OD şi cealaltă axă perpendiculară pe OD. Deoarece densitatea plăcii este $\frac{1}{3}$, rezultă $I_{33} = \frac{14}{3}$. Deci energia cinetică a plăcii este

(5) $$E_1 = \frac{7}{3}\dot{\psi}^2.$$

Pe de altă parte, utilizînd teorema lui König (13.7), obţinem pentru energia cinetică a barei BC expresia

(6) $$E_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\left[10\dot{\psi}^2+\frac{4}{3}\dot{\varphi}^2-2\sqrt{10}\,\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos(\psi+\varphi+\tfrac{\pi}{12}-\beta)\right].$$

Astfel energia cinetică a sistemului este dată de formula

(7) $$E = \left(\frac{22}{3}+5\sqrt{3}\right)\dot{\psi}^2 +$$

$$+\frac{2}{3}(1+\sqrt{3})\dot{\varphi}^2-(1+\sqrt{3})\sqrt{10}\,\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos(\psi+\varphi+\tfrac{\pi}{12}-\beta).$$

Dacă aproximăm pe $\cos(\psi+\varphi+\frac{\pi}{12}-\beta)$ prin $\cos(\frac{\pi}{12}-\beta)$ şi ţinem seama că

$$\sqrt{10}\cos\left(\frac{\tilde{\pi}}{12}-\beta\right)=\frac{1+2\sqrt{3}}{2},$$

putem scrie

$$(8)\quad\begin{cases}U_s=-\frac{g}{2}\left[2\sqrt{2}(2+\sqrt{3})\psi^2+(1+\sqrt{3})\varphi^2\right],\\ E_s=\left(\frac{22}{3}+5\sqrt{3}\right)\dot{\psi}^2+\frac{2}{3}(1+\sqrt{3})\dot{\varphi}^2-\frac{7+3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\dot{\psi}\dot{\varphi}.\end{cases}$$

Ecuaţiile lui Lagrange sînt atunci

$$(9)\quad\begin{cases}\left(\frac{44}{3}+10\sqrt{3}\right)\ddot{\psi}-\frac{7+3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ddot{\varphi}+2g\sqrt{2}\,(2+\sqrt{3})\psi=0,\\ -\frac{7+3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ddot{\psi}+\frac{4}{3}(1+\sqrt{3})\ddot{\varphi}+g(1+\sqrt{3})\varphi=0,\end{cases}$$

sau

$$(9')\quad\begin{cases}2\sqrt{2}(8\sqrt{3}-1)\ddot{\psi}+3(\sqrt{3}-5)\ddot{\varphi}+12g\psi=0,\\ 3\sqrt{2}\,(1+2\sqrt{3})\ddot{\psi}-8\ddot{\varphi}-6g\varphi=0.\end{cases}$$

Căutăm o soluţie a acestui sistem diferenţial de forma

$$(10)\qquad \psi=A_1\sin(\omega t+\alpha),\quad \varphi=A_2\sin(\omega t+\alpha),$$

A_1, A_2, ω şi α fiind constante.

Inlocuind pe (10) în (9') obţinem sistemul algebric

$$(11)\quad\begin{cases}2\sqrt{2}\left[3\sqrt{2}g+(1-8\sqrt{3})\omega^2\right]A_1+3(5-\sqrt{3})\omega^2A_2=0,\\ 3(1+2\sqrt{3})\omega^2A_1+2(3g-4\omega^2)A_2=0.\end{cases}$$

Prin anularea determinantului sistemului (11) se găseşte

$$(47\sqrt{3}-7)\omega^4+12g(1-4\sqrt{2}-8\sqrt{3})\omega^2+36\sqrt{2}\,g^2=0.$$

Această ecuaţie de gradul doi în ω^2 are două rădăcini pozitive ω_1^2 şi ω_2^2. Pentru $\omega=\omega_1$ avem

$A_1=\sqrt{2}(3g-4\omega_1^2)C_1$, $A_2=-3(1+2\sqrt{3})\omega_1^2C_1$, deci

$\psi=\sqrt{2}(3g-4\omega_1^2)C_1\sin(\omega_1t+\alpha_1)$, $\varphi=-3(1+2\sqrt{3})\omega_1^2C_1\sin(\omega_1t+\alpha_1)$,

iar pentru $\omega=\omega_2$ rezultă $A_1=\sqrt{2}(3g-\omega_2^2)C_2$, $A_2=-3(1+2\sqrt{3})\omega_2^2C_2$ şi

$\psi=\sqrt{2}(3g-4\omega_2^2)C_2\sin(\omega_2t+\alpha_2)$, $\varphi=-3(1+2\sqrt{3})\omega_2^2C_2\sin(\omega_2t+\alpha_2)$.

Integrala generală a sistemului diferenţial (9') este de forma

$$\begin{cases} \psi = \sqrt{2}(3g-\omega_1^2)C_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+\sqrt{2}(3g-\omega_2^2)C_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2), \\ \psi = -3(1+2\sqrt{3})\left[\omega_1^2 C_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+\omega_2^2 C_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\right] \end{cases}$$

şi conţine patru constante arbitrare C_1, C_2, α_1 şi α_2.

Observaţie. Acest sistem mecanic reprezintă un exemplu de pendul dublu. Se numeşte pendul dublu un sistem material format din două rigide care au centrele de greutate în acelaşi plan vertical, primul corp fiind mobil în jurul unei axe orizontale fixe, iar al doilea fiind mobil în jurul unei axe paralele cu cea dintîi şi legată invariabil de primul rigid.

372. Să se studieze micile oscilaţii tranversale într-un plan orizontal ale unui fir elastic (coardă vibrantă) de lungime finită a , cu extremităţile fixate, în cazul cînd masa sa este distribuită în mod egal în n puncte, care în poziţia de echilibru sînt egal depărtate între ele şi faţă de capetele firului.

Rezolvare. Luăm reperul x_1Ox_2 cu axele orizontale, aşa încît una dintre extremităţile firului să fie în O şi cealaltă pe semiaxa pozitivă Ox_1. In poziţia de echilibru firul este reprezentat prin segmentul $x_1 \in [0,a], x_2 = 0$. Fie P_i, $i=\overline{1,n}$, punctele firului în care este concentrată masa sa, iar P_0 ($P_0 \equiv O$) şi P_{n+1} extremităţile firului. Dacă M este masa totală a sistemului, atunci masa fiecăruia dintre punctele P_i, $i=\overline{1,n}$, este egală cu $\frac{M}{n}$. Notăm cu u_i deplasările perpendiculare pe axa Ox_1 ale punctelor P_i, $i=\overline{1,n}$. Aceste n cantităţi u_i pot fi considerate drept coordonate generalizate ale sistemului. In timpul mişcării coordonatele punctelor $P_0, P_1, \ldots, P_{n+1}$ sînt

(1) $$x_{1i} = i\frac{a}{n+1}, \quad x_{2i} = u_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1,$$

unde am pus

(2) $$u_0 = 0 \ , \ u_{n+1} = 0 \ .$$

Din formulele (1) deducem

(3) $$\overrightarrow{P_iP_{i+1}} = \frac{a}{n+1}\bar{e}_1 + (u_{i+1}-u_i)\bar{e}_2 \ , \quad 0 \leq i \leq n \ .$$

Energia cinetică totală are expresia

(4) $$E = \frac{M}{2n}\dot{u}_i\dot{u}_i \ .$$

Deoarece elongaţiile u_i sînt presupuse mici, putem admite că tensiunea firului are mărimea constantă şi egală cu T . Alungirea porţiunii P_iP_{i+1} a firului este dată de relaţia

$$e_i = \sqrt{(\frac{a}{n+1})^2+(u_{i+1}-u_i)^2} - \frac{a}{n+1} = \frac{a}{n+1}\left(\sqrt{1+(\frac{n+1}{a})^2(u_{i+1}-u_i)^2}-1\right) \approx$$

$$\approx \frac{n+1}{2a}(u_{i+1}-u_i)^2 \ , \quad 0 \leq i \leq n \ ,$$

astfel că pentru lucrul mecanic elementar al sistemului găsim

$$\delta\mathcal{L} = -\sum_0^n T\,\delta e_i = -\delta\left(\sum_0^n Te_i\right) .$$

Rezultă că există o funcţie de forţe şi este de forma

(5) $$U = -\frac{(n+1)T}{2a}\sum_0^n (u_{i+1}-u_i)^2 \ ,$$

deci pentru $u_i = 0$, $i=\overline{1,n}$, avem o poziţie de echilibru stabil.

Ecuaţiile diferenţiale ale oscilaţiilor sînt

(6) $$\ddot{u}_i = k^2(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}), \ k^2 = n(n+1)\frac{T}{aM}, \ i = \overline{1,n} \ .$$

Căutăm o soluţie a acestor ecuaţii diferenţiale de forma

(7) $$u_i = A_i\sin(\omega t + \alpha) \ , \quad i = \overline{1,n} \ ,$$

A_i, ω şi α fiind constante. Se obţine sistemul de ecuaţii algebrice

(8) $$(2k^2-\omega^2)A_i = k^2(A_{i-1} + A_{i+1}) \ , \quad i=\overline{1,n} \ ,$$

(9) $$A_0 = 0 \ , \ A_{n+1} = 0 \ .$$

Punînd $\cos\theta = 1 - \frac{\omega^2}{2k^2}$ ecuaţiile (8) devin

(8') $$2A_i \cos\theta = A_{i-1} + A_{i+1} \ , \quad i=\overline{1,n} \ .$$

Utilizînd identitatea trigonometrică

$$2\sin p\theta \cos\theta = \sin(p-1)\theta + \sin(p+1)\theta \ ,$$

deducem că ecuaţiile (8) sînt satisfăcute de

(10) $$A_i = \sin i\theta \ , \ 0 \leq i \leq n+1 \ .$$

Cu aceasta egalitatea $(9)_1$ este verificată identic, iar $(9)_2$ dă condiţia pentru determinarea lui ω

$$\sin(n+1)\theta = 0 \ .$$

Astfel avem

$$\theta_j = \frac{j\pi}{n+1} \ , \quad j=\overline{1,n}$$

şi, prin urmare , găsim

(11) $$\omega_j = 2k \sin\frac{j\pi}{2(n+1)} \ , \quad j=\overline{1,n} \ .$$

Pentru amplitudinea A_i, din (10), obţinem

(12) $$A_{ij} = \sin\frac{ij\pi}{n+1} \ , \quad i,j = \overline{1,n} \ .$$

O oscilaţie oarecare a sistemului este dată de formula

(13) $$u_i = C_j \sin\frac{ij\pi}{n+1} \sin(2kt \sin\frac{j\pi}{2(n+1)} + \alpha_j) \ , \quad i,j = \overline{1,n} \ ,$$

C_j şi α_j fiind 2n constante arbitrare.

<u>Observaţie.</u> Această problemă a fost tratată de către J.L. Lagrange în celebra sa „Mécanique analytique" . Lagrange a arătat că din formulele găsite, prin trecere la limită, se pot obţine oscilaţiile libere ale unei coarde omogene (cu extremităţile fixate), a cărei masă este distribuită uniform de-a lungul coardei. Densitatea de masă este $\rho = \frac{M}{a}$.

Problema rezolvată mai sus reprezintă analogul discret al coardei omogene cu pulsaţiile principale

(14) $$\omega_j^{(n)} = \frac{2}{a}\sqrt{n(n+1)\frac{T}{\rho}}\sin\frac{j\pi}{2(n+1)} \quad , \quad j = \overline{1,n} \, .$$

In legătură cu aceasta menționăm faptul că egalitățile (6) sînt chiar ecuațiile cu diferențe finite în raport cu x_1, corespunzătoare ecuației coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \quad , \quad b = \frac{ak}{n+1} \quad ,$$

în punctele $x_{1i} = i\frac{a}{n+1}$, $i=\overline{1,n}$ (pasul fiind $\frac{a}{n+1}$) .

Dacă $n \longrightarrow \infty$ din (14) rezultă pentru pulsațiile ω_j ale coardei omogene fixată la capete expresiile cunoscute

(15) $$\omega_j = j\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad , \quad j=\overline{1,n} \, .$$

Aceste formule exprimă legile lui M.Mersenne (1588-1648), după care toate pulsațiile sînt multipli întregi de pulsația tonului fundamental $\omega_1 = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ și fiecare pulsație este direct proporțională cu rădăcina pătrată a tensiunii firului și invers proporțională cu lungimea și rădăcina pătrată a densității firului. Aceste afirmații sînt valabile și pentru frecvențele $\nu_j = \frac{\omega_j}{2\pi}$.

Reprezentăm oscilațiile armonice de ordinul i ale coardei omogene sub forma

(16) $$u_i(x_1,t) = u_i(x_1)\sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad , \quad x_1 \in [0,a] \, ,$$

unde $u_i(x_1)$ este amplitudinea oscilației respective.

Presupunînd că amplitudinea $u_i(x_1)$ poate fi obținută din egalitățile (12) prin trecere la limită, pentru $n \longrightarrow \infty$ și $\frac{ja}{n+1} \longrightarrow x_1$, din (12) deducem

$$u_i(x_1) = \sin\frac{i\pi x_1}{a} \quad , \quad i = 1,2,\ldots$$

Atunci oscilaţiile libere ale coardei omogene (care rezultă din suprapunerea liniară a oscilaţiilor principale (16)) se exprimă prin formula

$$u(x_1,t) = \sum_1^{\infty} C_i \sin \frac{i\pi x_1}{a} \sin(\omega_i t + \alpha_i) ,$$

unde C_i şi α_i $(i = 1,2,\ldots)$ sînt constante arbitrare.

BIBLIOGRAFIE

1. Angheluţă, Th., Popoviciu, T., Călugăreanu, Gh., Exerciţii şi probleme de analiză, teoria funcţiilor şi mecanică raţională, Editura Universităţii, Cluj, 1937.
2. Appell, P., Traité de Mécanique rationnelle, Quatrième édition, T.I,II, Gauthier-Villars, Paris, 1919-1923.
3. Aubert, P., Papelier, G., Exercices de Mécanique, Cinquième édition, Librairie Vuibert, Paris, 1937.
4. Bălan, St., Culegere de probleme de mecanică, Ediţia a II-a, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.
5. Béghin, H., Julia, G., Exercices de Mécanique, T.I,Fasc.I, II, Gauthier-Villars, Paris, 1930-1931.
6. Bisconcini, G., Esercizi e complementi di Mecanica Razionale, Tamburini, Milano, 1927.
7. Brelot, M., Les principes mathématiques de la Mécanique classique, Arthaud, Grenoble, Paris, 1945.
8. Buchholtz, N.N., Voronkov, I.M., Minakov, I.A., Culegere de probleme de mecanică raţională, Editura tehnică, Bucureşti, 1952.
9. Catedra de mecanică, Institutul Politehnic Bucureşti, Culegere de probleme de mecanică, vol.I şi II, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1960-1963.
10. Fabry, E. Problèmes de Mécanique rationnelle, Hermann,Paris, 1915.
11. Gábos, Z., Mangeron,D., Stan, I., Fundamentele mecanicii, Editura Academiei, Bucureşti, 1961.
12. Gantmacher, F., Lectures in Analytical Mechanics, Mir Publishess, Moscow, 1970.

13. Graffi, D., Elementi di Meccanica Razionale, Casa editrice R. Pàtron, Bologna, 1970.
14. Graffi, D., Esercizi di Meccanica Razionale, Quarta edizione, Casa editrice R. Pàtron, Bologna, 1970.
15. Grindei, I., Mecanică teoretică, Universitatea „Al.I.Cuza" Iaşi, 1969.
16. Iacob, C., Mecanică teoretică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
17. Julia, G., Cours de Cinématique, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
18. Levi-Civita, T., Amaldi, U., Lezioni di Meccanica Razionale, Vol.I, II_1, II_2, N. Zanichelli, Bologna, 1923-1927.
19. Mattioli, G.D., Esercizi di Meccanica Razionale, La Litotipo, Padova, 1923.
20. Meşcerski, I.V., Rabotî po mehanike tel peremenoi massî, Moskva, Leningrad, 1949.
21. Moreau, J.J., Mécanique classique, T.II, Masson, Paris, 1971.
22. Nekrasov, A.I., Curs de mecanică teoretică, vol.I şi II, Editura tehnică, Bucureşti, 1955.
23. Pars, L.A., Analiticeskaia dinamika, Izd-va „Nauka", Moskva, 1971.
24. Pérès, J., Mécanique générale, Masson, Paris, 1953.
25. Plăcinţeanu, I., Mecanică vectorială şi analitică, Ediţia a II-a, Editura tehnică, Bucureşti, 1958.
26. Radu, A., Probleme de mecanică, vol.I, Universitatea „Al. I.Cuza" Iaşi, 1972.
27. Saint-Germain, A. de, Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle, Gauthier-Villars, Paris, 1889.

Scanned with OKEN Scanner

28. Sanielevici,S., Curs de mecanică raţională,Vol.I şi II, Editura Casei Şcoalelor, Iaşi, 1929-1931.

29. Stan, A., Grumăzescu, M., Probleme de mecanică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974.

30. Stoenescu, Al., Rîpianu, A., Atanasiu, M., Culegere de probleme de mecanică teoretică, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.

31. Suslov, G.K., Mecanica raţională, Vol.I şi II, Editura tehnică, Bucureşti, 1950.

32. Synge, J.L., Classical Dynamics, Handbuch der Physik,Band III/1 , Springer-Verlag, Berlin, Göttingen,Heidelberg,1960.

33. Vâlcovici, V., Bălan, St., Voinea, R. ş.a., Mecanica teoretică, Ediţia a doua, Editura tehnică, Bucureşti, 1963.

C U P R I N S

Partea a doua

DINAMICA SI STATICA PUNCTULUI MATERIAL

Cap.VI. Dinamica punctului material liber 5

Cap.VII. Forţe centrale 75

Cap.VIII. Dinamica punctului material supus la legături 114

Cap.IX. Statica punctului 193

Cap.X. Mişcarea punctului material într-un reper neinerţial (Mişcarea relativă a punctului material) 234

Partea a treia

DINAMICA SI STATICA SISTEMELOR MATERIALE

Cap.XI. Geometria maselor 259

Cap.XII. Sisteme de forţe 284

Cap.XIII. Dinamica sistemelor de puncte 306

Cap.XIV. Dinamica rigidului 338

Cap.XV. Statica sistemelor mecanice 391

Cap.XVI. Sisteme cu masă variabilă 443

Cap.XVII. Teoria percuţiilor 466

Partea a patra

M E C A N I C Ă ' A N A L I T I C Ă

Cap.XVIII. Ecuaţiile lui Lagrange 493

Cap.XIX. Ecuaţiile lui Hamilton 534

Cap.XX. Stabilitate şi oscilaţii 567

B i b l i o g r a f i e 586